ORSAY
n° d'ordre : 2505

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

Le GRADE de DOCTEUR D'ETAT

SPECIALITE : SCIENCES PHYSIQUES

PAR

M. WESFREID José

SUJET : ETUDE DE LA CONVECTION DE RAYLEIGH-BENARD AU VOISINAGE DU SEUIL D'INSTABILITE

soutenue le 23 SEPTEMBRE 1981 devant la Commission d'examen

MM. BERGE

BERNARD

FROIDEVAUX

GUYON

POMEAU

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

ORSAY
n° d'ordre : 2505

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

Le GRADE de DOCTEUR D'ETAT

SPECIALITE : SCIENCES PHYSIQUES

PAR

M. WESFREID José

SUJET : ETUDE DE LA CONVECTION DE RAYLEIGH-BENARD AU VOISINAGE DU SEUIL D'INSTABILITE

soutenue le 23 SEPTEMBRE 1981 devant la Commission d'examen

MM. BERGE

BERNARD

FROIDEVAUX

GUYON

POMEAU

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547321_0032

Ce travail a été réalisé au Service de Physique du Solide et de Résonance Magnétique du Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, au Commissariat à l'Energie Atomique. J'exprime ma reconnaissance à leurs responsables respectifs pour leur chaleureux accueil.

Mes remerciements vont d'abord à Pierre BERGE, qui a assuré la direction de ma thèse. Ce travail est le fruit d'une interaction constante avec Monique DUBOIS et Pierre BERGE : à eux va toute ma profonde reconnaissance pour la patience avec laquelle ils m'ont guidé, et le plaisir que j'ai éprouvé à travailler avec eux. Il est clair que cette thèse n'a été possible que grâce à leurs conseils judicieux et à l'amitié qu'ils m'ont témoigné.

J'ai fréquemment trouvé auprès de Yves POMEAU, Christiane NORMAND et Paul MANNEVILLE un soutien sur le plan théorique et d'innombrables suggestions. Je les remercie bien sincèrement.

J'exprime aussi toute ma reconnaissance à Vincent CROQUETTE, Daniel BEYSENS, Patrick CALMETTES, Gilbert ZALCZER et Moussilieu GBADAMASSI, dont la compétence, l'aide et l'amitié m'ont été précieuses.

Je remercie tout particulièrement Etienne GUYON qui a accepté de présider le jury de ma thèse. Ses avis et conseils m'ont été d'une grande utilité.

Je sais gré à Monsieur J.J. BERNARD et Monsieur C. FROIDEVAUX, qui m'ont fait l'honneur d'être membres du jury.

Je tiens à remercier Bernard OZENDA et Martial LABOUISE pour les soins qu'ils ont apporté dans la réalisation des divers montages expérimentaux.

Je remercie également Chantal POMEAU, qui s'est chargée de la frappe du manuscrit avec une efficacité remarquable et une gentillesse extrême.

A mes Collègues

"disparus"

Chapitre 1. Introduction et résumé.

Chapitre 2. Phénomènes physiques dans l'instabilité.

2.1. Diffusion de la température
2.2. Diffusion de la vorticité, équation de Navier-Stokes.
2.3. Poussée d'Archimède
2.4. Nombre de Prandtl
2.5. Instabilité thermoconvective.
2.6 Seuil de convection.
2.7. Nombre de Rayleigh.
2.8. Organisation spatiale.

Chapitre 3. Analyse phénoménologique de l'instabilité.

3.1. Brisure de symétrie.
3.2. Analogies entre instabilités et transition de phase.
3.3. Théorie de Landau
3.4. Potentiel
3.5. Densité spatiale de potentiel.
3.6. Equation de mouvement.

Chapitre 4. Equation pour l'amplitude.

4.1. Equations hydrodynamiques
4.2. Taux de croissance des fluctuations
4.3. Equation d'amplitude
4.4. Autres types d'approche
4.5. Validité et conséquence des équations d'amplitude.

Chapitre 5. Méthodes expérimentales d'étude de la convection.

5.1. Flux de chaleur
5.2. Mesures de températures
5.3. Méthodes optiques de détection thermique.
5.4. Déviation de faisceaux
5.5. Interféromètre différentiel
5.6. Visualisation par ombroscopie
5.7. Mesure des vitesses.
5.8. Dispositif expérimental pour l'anémomètre
5.9. Caractéristiques physiques du fluide de convection.
5.10. Boite de convection.

Chapitre 6. Comportement critique dans la convection de Rayleigh-Bénard.

6.1. Dynamique (amortissement critique).
6.2. Longueur d'influence.
6.3. Solution exacte pour l'enveloppe V(x)
6.4. Seuil de convection et effets de taille
6.5. Conditions aux bords.

Publication I *"Critical effects in Rayleigh-Bénard convection"*.

Chapitre 7. Convection induite

7.1. Convection induite.

Publication II *"Induced pretransitional Rayleigh-Bénard convection"*.

Publication III *"Study of pretransitional induced Bénard convection by two-dimensional numerical experiments"*

Publication IV *"Wavenumber variations of spatially damped Rayleigh-Bénard convection "*

Appendice à la publication IV.

7.2. Bifurcation imparfaite et susceptibilité.

Chapitre 8. Structure non-Boussinesq

8.1. Dissymétries
8.2. Structure convective : hexagones.

Publication V *"Non Boussinesq convective structures in water near 4°C"*

Chapitre 9. Diffusion de la phase.

9.1. Variable de phase, description des perturbations.
9.2. Diffusion de la phase
9.3. Stabilité
9.4. Amplitude et phase.

Publication VI *"Forced phase diffusion in Rayleigh-Bénard convection"*.

Bibliographie.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION ET RESUME

1. *Introduction*

Au moment où ce travail a été entrepris, le comportement de la vitesse convective dans l'instabilité de Rayleigh-Bénard avait été déterminé en détail ; la technique d'anémomètrie laser-Doppler avait été appliquée avec succès à la détermination du champ des vitesses dans le cas de rouleaux bidimensionnels. Les principaux résultats acquis étant :

- la mise en évidence du comportement spatial périodique de la vitesse avec essentiellement 1 mode de Fourier fondamental de type $V_o \sin(\frac{2\pi x}{\Lambda_o})$ auquel s'ajoutent des harmoniques spatiaux de type $V_n \sin(\frac{2\pi x}{\Lambda_o/n})$ dont l'importance croît avec l'écart au seuil critique $R - R_c$. $(n \geq 2)$

- la détermination de la valeur absolue ainsi que du comportement avec $R - R_c$ des amplitudes de V_o, V_2 ; un résultat essentiel étant que $V_o \sim (R - R_c)^{0.5}$, la valeur 0.5 correspond à un exposant critique classique.

Parallèlement à cela on disposait de théories linéaires et non-linéaires de différents types dans lesquelles apparaissaient plus ou moins explicitement des analogies entre la convection de Rayleigh-Bénard et une transition de phase.

Il apparaissait alors intéressant d'entreprendre un programme expérimental pour exploiter toutes les analogies pouvant exister entre la convection de Rayleigh-Bénard au voisinage du seuil de son apparition et une transition de phase de 2ème espèce.

Notre étude a porté essentiellement sur le même type de fluide (huile aux silicones de viscosité 0.5 stokes) mis dans un cadre rectangulaire de grand rapport d'aspect selon x (Lx/d = 30), et de rapport d'aspect selon Y plus faible Ly/d = 5 pour préserver le caractère bidimensionnel de la convection. La technique expérimentale essentielle est l'anémomètrie laser-Doppler associée à des techniques de visualisation optique. On trouvera dans le chapitre 4 la description détaillée des méthodes.

Par ailleurs on trouvera dans le chapitre 2 des rappels élémentaires sur sur les divers processus entrant en jeu dans la convection de Rayleigh-Bénard et, dans les chapitres 3 et 4, deux approches théoriques permettant d'établir l'équation d'amplitude décrivant le problème convectif au voisinage du seuil de convection R_c.

Les résultats expérimentaux essentiels sont tout d'abord la mise en évidence de la portée de l'effet de paroi ou longueur de corrélation ξ^+ ainsi que la mise en évidence du phénomène de ralentissement critique qui sont décrites au chapitre 6.

Comme suite logique de la mise en évidence du comportement critique de l'effet de paroi, nous avons ensuite étudié l'induction de rouleaux d'une couche sous-critique par l'effet d'une perturbation ce qui a permis de déterminer la longueur de perturbation ξ^- (voir ch. 7). Ce travail sur l'induction sous-critique est complété par l'étude de la longueur d'onde des rouleaux induits et par les premières évidences de l'analogie d'une susceptibilité.

L'ensemble de ces résultats montre qu'au voisinage de R_c l'instabilité de Rayleigh-Bénard présente toutes les analogies avec une transition de 2ème ordre correspondant à une bifurcation normale.

Par comparaison nous reportons dans le chapitre 8 l'étude de la convection dans l'eau au voisinage de 4°C qui présente alors une bifurcation sous-critique, genre transition du 1er ordre.

Enfin notre connaissance des propriétés d'un système de rouleaux bidimensionnels a été complétée par l'étude de la dynamique de perturbations de la phase, dont le caractère diffusif et les coefficients de diffusion ont pu être déterminés (voir chapitre 9).

CHAPITRE 2

PHENOMENES PHYSIQUES DANS L'INSTABILITE

L'étude du mouvement convectif de couches de fluide chauffées par le bas, correspondant à l'instabilité dite de Rayleigh-Bénard [1], nous amène à donner un aperçu sur les différents phénomènes qui sont en jeu.

Pour obtenir une approche physique simple de cette instabilité on peut rappeler quels sont les effets thermiques et hydrodynamiques qui interviennent, ainsi que les forces qui agissent sur le fluide.

2.1. *Diffusion de la température*

La dynamique des inhomogénéités spatiales de température est gouvernée par des mécanismes moléculaires. Si dans une région on produit brusquement une hétérogéneité localisée de température (par exemple par échauffement produit par laser), quand le temps s'écoule, on constate un étalement de l'hétérogéneité de température vers les régions voisines. Le processus d'homogénéisation se fait de façon diffusive. Dans un problème unidimensionnel, ce processus de diffusion est représenté par l'équation

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \qquad (1)$$

où κ est le coefficient de diffusion thermique appelé diffusivisité thermique.

Cette loi de diffusion résulte de la loi (linéaire) de Fourier pour le transport de chaleur $q = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x}$ (λ = conductivité thermique) et de celle de la conservation de l'énergie thermique. ($\lambda/\rho c_p = \kappa$).

La solution de (1) est donnée en fonction d'une distance caractéristique $\langle \ell \rangle = \sqrt{\kappa t}$ (Fig.1) (au lieu de $\langle \ell \rangle = vt$ comme dans le cas d'un phénomène de propagation). Réciproquement, si nous considérons une "goutte" de liquide de rayon R à température $T_o + \theta$ entourée d'un milieu à T_o, le temps de relaxation thermique de cette goutte sera $\tau = R^2/\kappa$.

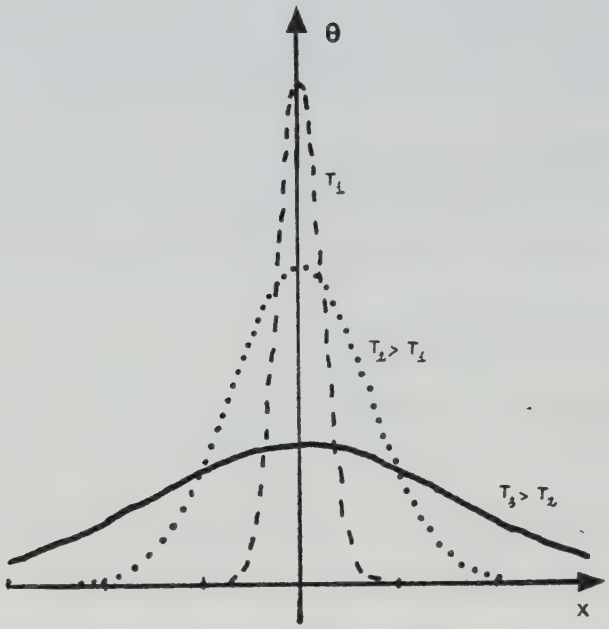


Fig.1. Solution de (1) pour une impulsion ;

$$\theta(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} e^{-x^2/4\kappa t}$$

2.2. *Diffusion de la vorticité, équation de Navier-Stokes*

La représentation de la deuxième loi de Newton pour un élément de volume du fluide donne l'équation du mouvement du fluide.

L'accélération $\frac{d\vec{v}}{dt}$, en suivant le déplacement des particules, est $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}$. Les termes de force sont donnés par les forces de volume (pesanteur), les forces visqueuses et celles de pression. Ces deux dernières proviennent de l'action des contraintes sur la surface de l'élément du fluide. Dans le cas le plus simple de fluides incompressibles, cette représentation est l'équation de Navier-Stokes, qui s'écrit :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}(p/\rho) - \vec{\nabla}(gz) + \nu\Delta\vec{v} \qquad (2)$$

où ν est la viscosité cinématique.

Tout d'abord, regardons dans un exemple type, comment la viscosité ν gouverne la dynamique des perturbations de vitesse : celui d'un fluide incompressible, en contact avec une surface plane illimitée, en mouvement horizontal (Fig.2). La seule composante non nulle de vitesse est horizontale et n'es

fonction que de la coordonnée verticale : $V_y = f(x)$. L'équation du mouvement (Navier-Stokes)est réduite ici à :

$$\frac{\partial V_y}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} \quad , \qquad (3)$$

qui est de type diffusif où ν est le coefficient de diffusion pour la composante V_y.

L'équation de transport qui correspond à ce phénomène diffusif unidimensionnel est la loi de Newton : $\sigma_{xy} = -\nu \frac{d}{dx} (\rho V_y)$ où σ_{xy} est la contrainte de cisaillement ou force par unité de surface et est proportionnelle au gradient d'impulsion. Le transport d'impulsion se fait, de façon irréversible, des régions de grandes vitesses aux régions de faibles vitesses. De la même façon que dans le problème thermique (cf. 2.1),une impulsion dans le mouvement horizontal de la plaque développe une couche limite qui pénètre avec une distance caractéristique $\langle \ell \rangle = \sqrt{\nu t}$. Des perturbations d'extension ℓ relaxent avec des temps ℓ^2/ν.

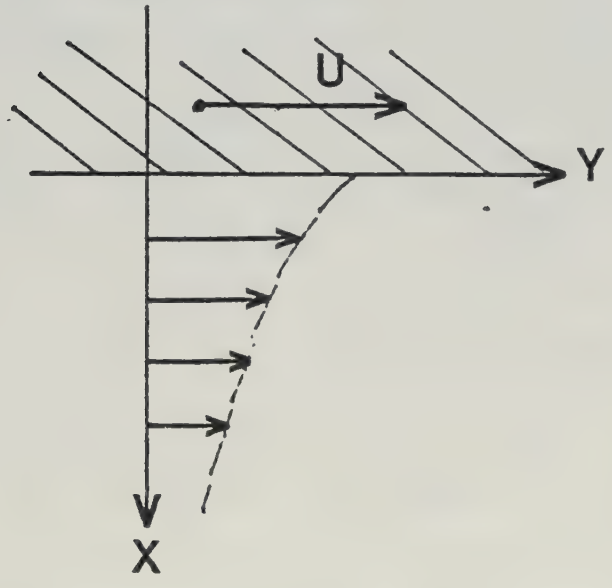


Figure 2

En toute rigueur, en appliquant une fonction échelon de vitesse à la plaque, on crée au temps initial une couche de vortex et c'est la vorticité (rot $\vec{v}$) qui diffuse. Car, si on applique l'opérateur rotationnel dans l'équation (2) de Navier-Stokes, et que l'on se limite, pour simplifier, au cas linéarisé [terme convectif $(\vec{V}.\vec{\nabla})\vec{V}$ négligé], on a pour $\vec{\omega}$: vecteur tourbillon

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \nu \Delta \vec{\omega} \quad , \qquad (4)$$

ν apparait dans cette expression comme un coefficient de diffusion pour la vorticité.

Les deux processus de relaxation (diffusion de la température et de la vorticité) sont généralement de caractères stabilisants vis à vis des perturbations thermiques et hydrodynamiques.

2.3. *Poussée d'Archimède*

La force d'Archimède est due à une variation de densité d'un élément de fluide par rapport à son entourage. La pression peut être à l'origine de cette variation, mais dans les situations qui nous intéressent nous ne considerons que les variations isobares. Les variations sont alors dues à des variations de température (ou de concentration).

Dans le cas d'un changement de densité dû à la température, l'équation d'état est donnée par :

$$\rho = \rho_o(1 - \alpha \Delta T) \qquad (5)$$

où α est le coefficient de dilatation en volume. La force par unité de volume sur un élément de fluide ("goutte chaude") à température $T_o + \Delta T$, entourée de fluide à température T_o, est égale à $|\vec{f}| = \rho_o \, g \, \alpha \, \Delta T$

En absence de viscosité et de diffusivité thermique, le temps que mettrait la goutte de liquide chaud (Fig.3) pour monter d'une distance H (à ΔT constante) est

$$\tau = \left(\frac{2H}{f/\rho_o}\right)^{1/2} = \left(\frac{2H}{\alpha g \Delta T}\right)^{1/2} .-$$

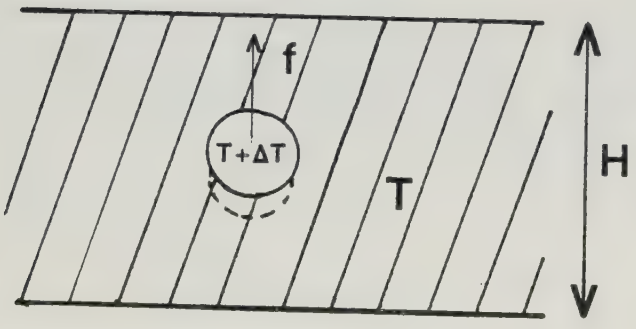


Figure 3

2.4. *Nombre de Prandtl*

L'illustration des effets stabilisants dus à la diffusion de la température et de la vorticité, peut se faire à partir de l'exemple d'une goutte de liquide, de rayon R, chauffée soudainement, dans un milieu isotherme. Du fait de son échauffement, la goutte va avoir tendance à monter.

Deux cas limites sont alors à considérer selon les valeurs relatives de κ et de ν , ou plus précisément selon les valeurs relatives du temps de relaxation de la température $\tau_{th} = R^2/\kappa$, et du temps de relaxation de la perturbation de la vitesse $\tau_v = R^2/\nu$. Le nombre de Prandtl mesure l'importance relative de ces deux temps :

$$Pr = \frac{\tau_{th}}{\tau_v} = \frac{R^2/\kappa}{R^2/\nu} = \nu/\kappa \quad .$$

Dans le cas où $\kappa >> \nu$, soit $Pr << 1$, τ_{th} est petit par rapport à τ_v ; donc l'effet moteur (poussée d'Archimède due à la différence de température ΔT) relaxe plus vite que la vitesse . Les effets inertiaux l'emportant, la goutte continue à monter alors que ΔT est devenu nul.

Dans le deuxième cas($\kappa << \nu$, donc $Pr >> 1$), le temps de relaxation de la vitesse est court, et le mouvement s'arrête dès que l'excès de température ΔT a fini de relaxer, donc les termes visqueux l'emportent.

Dans ce type de problème, on peut faire une analogie, qualitative, entre le nombre de Prandtl et l'inverse du nombre de Reynolds qui mesure,dans les écoulements,la compétition entre les termes inertiaux et visqueux (Re = termes inertiaux/termes visqueux = UL/ν).

Remarque : Le concept du nombre de Prandtl comme rapport de deux temps de relaxation ou de diffusion, est plus général et précis que le simple rapport de deux diffusivités. Dans les situations où la diffusion de la température et de la vorticité se font dans des échelles spatiales différentes, on a besoin d'utiliser $Pr = (\frac{L_{th}^2}{\kappa})/(\frac{L_v^2}{\nu})$ où L_{th} et L_v sont les distances caractéristiques pour l'aspect thermique et visqueux respectivement. C'est le cas de la filtration convective d'un fluide dans un milieu poreux [2] et de la convection dans les cellules type Hele-Shaw (dimension transversale très étroite) où L_{th} est la hauteur de la cellule où est appliquée une différence de température, et L_v est la taille des pores $\sim k^{1/2}$ (k : perméabilité) ou la distance transversale dans le deuxième exemple. Si $L_{th}^2 >> k$ (le milieu poreux peut être assimilé à un milieu fictif homogène - hypothèse de Darcy -),ou $L_{th}^2 >> \ell^2$ (cellule de Hele-Shaw) le nombre de Prandtl est grand dans la plupart des cas et presque indépendant du rapport ν/κ du liquide :

$$Pr = \frac{L_{th}^2}{k}\left(\frac{\nu}{\kappa^*}\right) \quad \text{et} \quad \frac{L_{th}^2}{\ell^2}\left(\frac{\nu}{\kappa^*}\right) >> 1$$

(κ^* : diffusivité effective).

2.5. *Instabilité thermoconvective* :

Des mouvements convectifs peuvent apparaître dans une couche de fluide dilatable quand il y a des inhomogénéités spatiales de la densité, dues par exemple à des non-uniformités de la température. On a alors convection thermique, et une nouvelle contribution (flux convectif) au flux de chaleur apparait.

Au contraire, sous certaines conditions il peut y avoir équilibre mécanique, et le fluide reste au repos. Mais cet équilibre peut être instable. C'est le cas de la convection de Rayleigh-Bénard, dans laquelle un gradient vertical de température, constant et parallèle au vecteur gravité $\vec{g}$ est imposé à une couche horizontale de fluide.

Supposons que l'on amène une goutte de fluide de rayon R (Fig. 4) située à z* (température $T_o + \theta$), à la position $z^* + \delta z$, où la couche de fluide est à la température T_o.

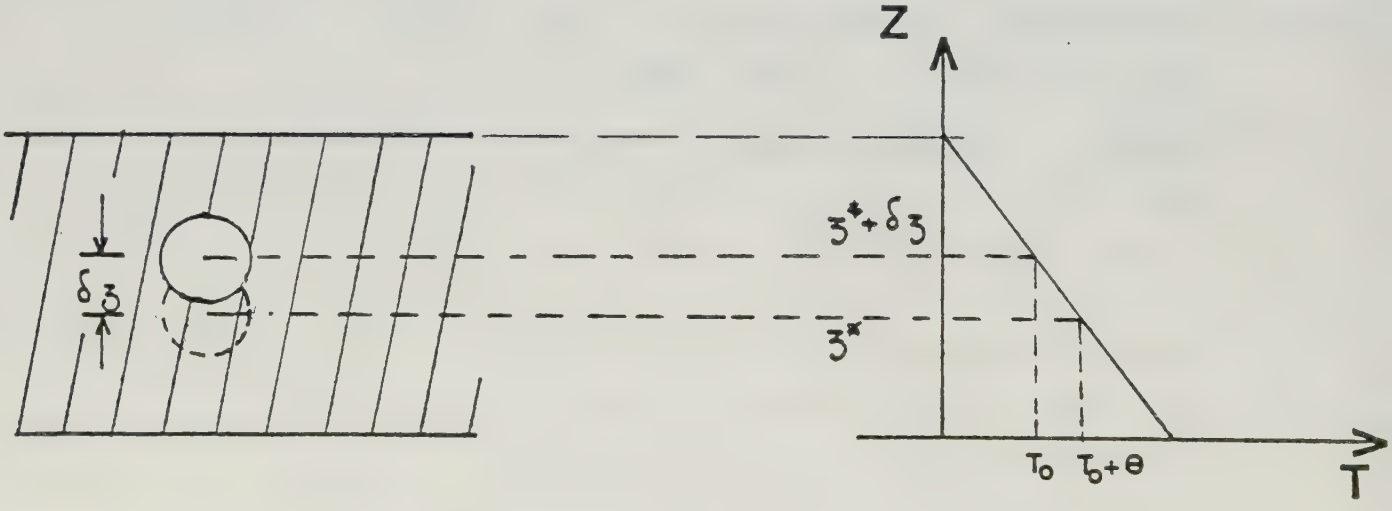


Figure 4

Ceci crée une poussée d'Archimède qui est l'effet moteur (ou destabilisant) ; en effet cette poussée tend à faire monter la goutte, mais deux effets tendent à s'opposer à cette montée : la relaxation thermique qui fait que la goutte se refroidit et la viscosité qui freine son mouvement.

Si l'effet destabilisant de la stratification de la densité l'emporte sur les deux effets stabilisants (dus à la relaxation thermique et visqueuse), le mouvement convectif se déclenchera. Le mouvement sera, évidemment, dans le sens contraire, si on fait descendre une goutte de $z^* + \delta z$ vers z^*.

Dans un système ouvert, dans lequel on maintient ce gradient de température constant entre les limites horizontales de la couche par application d'un flux de chaleur, ce mouvement fermé peut être conservé de façon permanente.

Remarques : *i*) Au lieu d'un gradient de température on peut établir un gradient de concentration (isotherme) destabilisant, et ce sera la diffusion de masse qui jouera un rôle stabilisant.

ii) Si le gradient de température est antiparallèle au vecteur $\vec{g}$ (chauffage par le haut), la statification est toujours stable. Il n'y a pas d'instabilité, l'état de repos est la seule solution.

iii) Si le gradient de température est horizontal, il y a toujours mouvement convectif. Il n'y a pas de seuil de convection.

2.6. *Seuil de convection*

La condition d'instabilité et l'existence d'un seuil pour lequel le mouvement convectif apparaît peuvent être illustrées avec le modèle suivant : considérons une couche de fluide limitée par deux parois horizontales distantes de d, et à des températures T_o et $T_o + \Delta T$ (haut et bas respectivement).

On isole un cylindre (rouleau) de rayon $R = d/2$, et longueur L (Fig.5) et on le fait tourner doucement, avec une vitesse angulaire $\frac{d\gamma}{dt}$.

Pendant un temps de l'ordre de $\frac{d^2}{\kappa} = \tau$, on aura un couple dû à la force d'Archimède ($\rho_o \alpha \Delta T g$) de telle façon que le couple moteur soit

$$Cm \sim \underbrace{(L\, d^2)}_{\text{Volume}} \cdot \underbrace{\rho_o \alpha \Delta T\, g}_{\text{Force}} \cdot \underbrace{d \sin \gamma}_{\text{Levier}}, \text{ et comme } \gamma \sim \frac{d\gamma}{dt} \cdot \tau$$

$$\Rightarrow \qquad Cm \sim L\, d^5\, \frac{\rho_o \alpha\, \Delta T\, g}{\kappa} \cdot \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)$$

Mais un couple visqueux s'y oppose, de valeur :

$$C_\nu \sim \underbrace{\eta}_{\substack{\text{viscosité}\\ \text{dynamique}}} \cdot \underbrace{(Ld)}_{\text{Surface}} \cdot \underbrace{(d \cdot \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{1}{d})}_{\substack{\text{gradient de}\\ \text{vitesse}}} \cdot \underbrace{d}_{\text{levier}}$$

$$\Rightarrow \quad C_\nu \sim \rho_o \nu L \, (\frac{d\gamma}{dt}) d^2 .$$

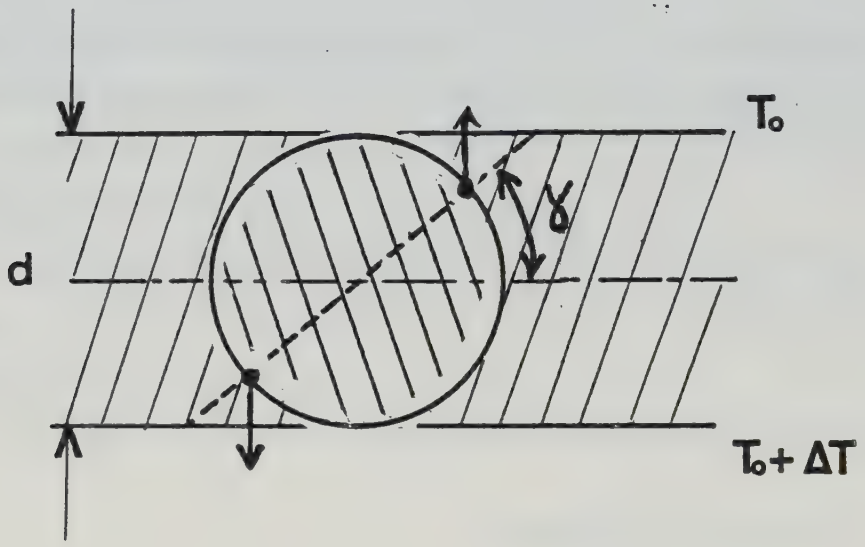


Figure 5

La condition de stabilité est donnée par l'inégalité : couple visqueux > couple moteur, de facon que :

$$\nu \rho_o L d^2 (\frac{d\gamma}{dt}) > L \, d^5 \, \frac{\rho_o \alpha g \, \Delta T}{\kappa} \, (\frac{d\gamma}{dt}) \quad ,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\alpha g \, \Delta T \, d^3}{\nu \kappa} < \text{constante (adimensionnelle)}.$$

Dans le cas inverse le mouvement convectif s'établit.

2.7. *Nombre de Rayleigh*

La grandeur $R = \alpha g \Delta T d^3 / \nu \kappa$ est le nombre de Rayleigh et mesure de façon adimensionnelle la différence de température ΔT. C'est le paramètre de contrôle de l'instabilité. Si R est plus grand qu'une valeur critique R_c, le mouvement convectif est établi.

On observe que R peut s'exprimer aussi comme le rapport des temps caractéristiques des phénomènes stabilisants et destabilisants. Pour les premiers, on utilise les temps de diffusion $\tau_{th} = d^2/\kappa$ (cf. 2.1) et $\tau_v = d^2/\nu$ (cf. 2.2), et pour le dernier, le temps d'advection dû à la poussée d'Archimède $\tau_a^2 = d/\alpha g \Delta T$ (cf. 2.3). Ainsi R peut s'écrire [20]

$$R = \frac{\tau_{th} \cdot \tau_v}{\tau_a^2} = \alpha g \Delta T \, d^3/\nu\kappa \quad .$$

$R > R_c$ exprime le fait que l'advection se fait suffisamment vite (τ_a petit) pour que les effets de freinage et d'homogénéisation de la température n'aient pas le temps de se manifester (on prendra ici une moyenne géométrique de τ_{th} et τ_v).

Cette façon d'exprimer la valeur adimensionnelle du paramètre de contrôle peut aider à comprendre le sens physique des différents effets entrant en jeu dans une instabilité. A titre d'illustration, nous comparons le cas de deux instabilités classiques (Tableau I).

2.8. *Organisation spatiale*

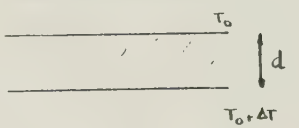
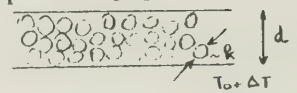
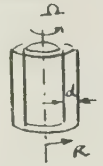
La force d'Archimède déclenche des mouvement verticaux (cf. 2.5) et, une fois le fluide mis en mouvement permanent, la conservation de la masse implique l'existence de trajectoires fermées. Ceci entraine l'organisation cellulaire pour le mouvement du fluide et l'existence d'une périodicité spatiale. Dans le cas d'une couche infinie, le choix de la longueur d'onde est unique au seuil de la convection. La valeur Λ est extrinsèque car elle dépend de la seule dimension significative : la hauteur de la couche d. Pour comprendre qualitativement ce choix de (Λ/d) considérons un critère d'optimisation de la dissipation au seuil de la convection [4].

Une longueur d'onde trop grande Λ augmente beaucoup la dissipation visqueuse sur la partie horizontale des trajectoires $-\sim \mu(\frac{\partial v_x}{\partial z})^2 \Lambda$ - . Une valeur trop faible de Λ augmente, par contre, le flux de chaleur horizontal par conduction entre les deux courants montant (chaud) et descendant (froid) $- \sim \Delta T/\Lambda$. - Donc, des valeurs de $\Lambda \gtrless \Lambda$ optimum ne correspondent pas à un équilibre optimum entre l'énergie cinétique et celle dissipée par les mécanismes thermiques et visqueux.

Les conditions aux limites horizontales déterminent la valeur de Λ optimum au seuil. Avec des surfaces libres horizontales, la dissipation

visqueuse est moindre qu'avec des surfaces rigides. La longueur d'onde horizontale Λ opt est, dans ce cas, plus grande que dans celui de surfaces horizontales rigides pour avoir une dissipation visqueuse équivalente. De fait, la théorie prévoit que dans le cas de surfaces isothermes libres $\Lambda_{o_{\ell\ell}} \sim 2.8\ d$, alors que dans le cas de parois rigides $\Lambda_{o_{rr}} \sim 2\ d$, et $\Lambda_{o_{\ell\ell}} > \Lambda_{o_{rr}}$.

TABLEAU I

Instabilité	Force destabilisante (par unité de volume) τ_f	Temps advectif associé $\tau_o = \left(\frac{d}{f/\rho}\right)^{1/2}$	Mécanisme/s diffusif stabilisant	Temps associé/s $\tau_1, \ldots \tau_n$	"R" $= \tau_1 \ldots \tau_n / \tau_o^n$
Rayleigh-Bénard 	Poussée d'Archimède $\rho_o \propto \Delta T g$	$(d/\alpha g \Delta T)^{1/2}$	1) diffusion de la vorticité dans la couche. 2) diffusion de la température au long de d.	d^2/ν d^2/κ	$R = \alpha g \Delta T d^3/\nu\kappa$
Rayleigh-Bénard dans le milieu poreux [2] 	"	"	1) diffusion de la vorticité dans les pores. 2) diffusion de la température au long de d.	k/ν d^2/κ^*	$R_D = \alpha g \Delta T d k/\nu\kappa^*$
Taylor-Couette* [3] 	Force centrifuge $\rho R\Omega^2$	$(d/R\Omega^2)^{1/2}$	1) diffusion de la vorticité radiale dans le "gap".	d^2/ν	$R_T^2 = Ta = d^3 R\Omega^2/\nu^2$

---

* L'instabilité de Taylor-Couette est celle relative à un fluide confiné entre deux cylindres concentriques dont, par exemple, le cylindre intérieur est en rotation alors que le cylindre extérieur est immobile. L'apparition de rouleaux de Taylor (seuil d'instabilité) se fait pour $Ta > Ta_c$.

CHAPITRE 3

ANALYSE PHENOMENOLOGIQUE DE L'INSTABILITE

3.1. *Brisure de symétrie.*

A $R = R_c$, l'état conductif ($\vec{V} = 0$), bifurque vers l'état convectif ($\vec{V} \neq 0$). Dans l'état conductif on a un système à haute symétrie : une couche en repos, avec une distribution linéaire verticale de la température, a des propriétés d'invariance par translation horizontale. Dans l'état convectif, les mouvements du fluide s'organisent en cellules de taille de l'ordre de la hauteur de la couche d, ce qui brise cette invariance par translation. Pour une même valeur de la longueur d'onde Λ , il peut exister des solutions de différentes symétries : rouleaux bidimensionnels, cellules hexagonales, superposition de structures en rouleaux à 90° qui donnent des cellules carrées ou rectangulaires, mais aussi des structures plus complexes provenant des rouleaux, carrés ou hexagones avec des défauts et distorsions.

Il est difficile d'établir des critères pour savoir quel va être le type de symétrie choisi (type d'organisation spatiale).

Cette organisation dépend de la géométrie et de la taille de la boite finie dans laquelle on fait l'expérience, mais aussi du nombre de Rayleigh, et des conditions initiales de démarrage de la convection, de la dynamique d'approche du nombre de Rayleigh, etc... (Fig.1). Par exemple, la structure hexagonale existe dans le cas où les propriétés physiques de la couche dépendent de la hauteur, ou comme solution transitoire [5].

Dans l'instabilité de Rayleigh-Bénard, il y a donc à $R = R_c$ une brisure spontanée de symétrie ; la phase de haute symétrie (état conductif, $R < R_c$) bifurque vers une phase de plus basse symétrie (état convectif, $R \geq R_c$).

3.2. *Analogies entre instabilités et transitions de phase*

Dans de nombreux systèmes thermodynamiques, à l'équilibre thermique, il existe des transitions de phase continues ou de $2^{ème}$ ordre, et souvent avec brisure spontanée de symétrie, au point critique T_c : transition ferromagnétique → paramagnétique (à champ nul) ; démixtion d'un mélange binaire, etc.. [6].

L'état de plus basse symétrie, est généralement, à basse température ($T < T_c$) où le paramètre d'ordre, qui exprime le degré de changement de la

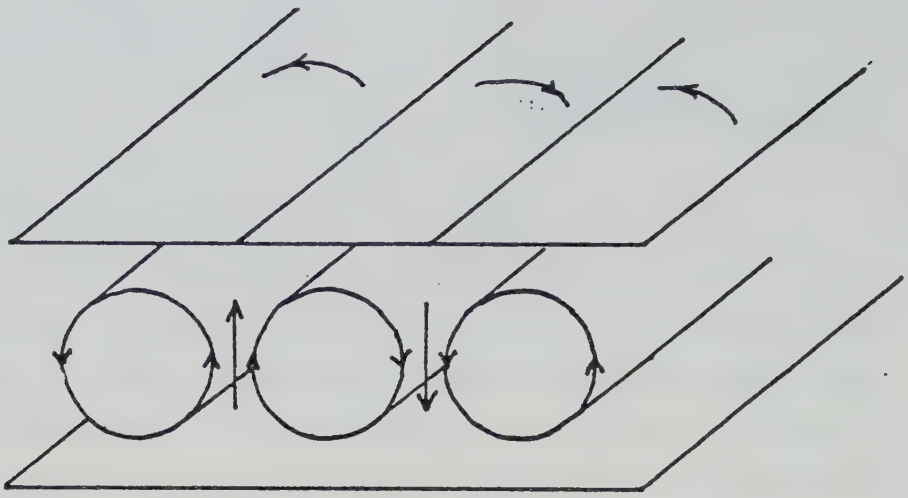


fig.1 i

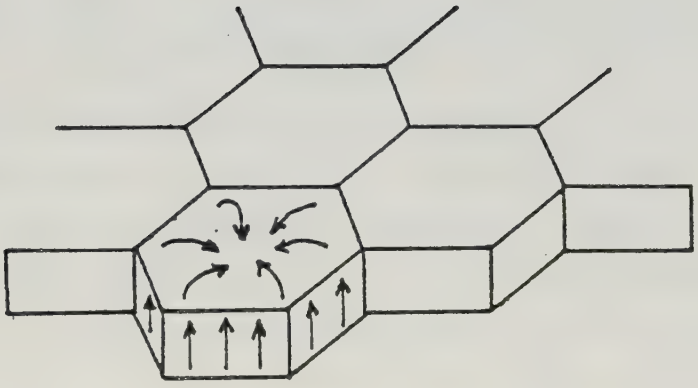


fig.1 ii

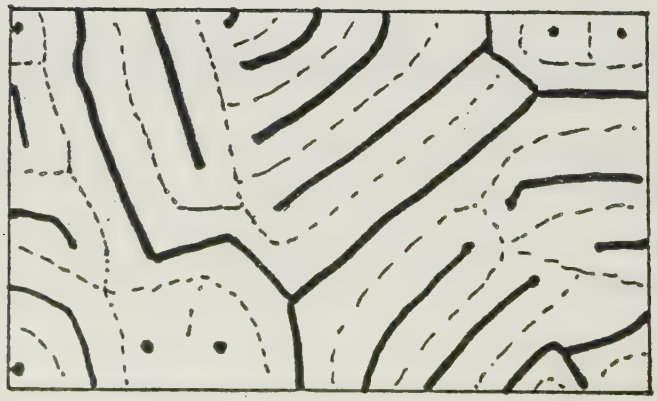


fig.1 iii (VUE DE DESSUS)

propriété physique pertinente (aimantation, concentration, etc.) est non nul.

Au voisinage du point critique T_c ,une transition continue se fait vers l'état où le paramètre d'ordre est nul. Ici le paramètre de contrôle est la température.

Par ailleurs il existe diverses situations où les changements correspondent à des phénomènes d'instabilités produits par la présence d'un paramètre de contrôle extérieur . Le flambage d'une poutre cylindrique représente un cas caractéristique. Pour $\lambda < \lambda_c$ (λ : force appliquée dans la direction de la poutre) la déflexion est nulle, et tous les plans contenant la poutre sont équivalents (solution à haute symétrie). Pour $\lambda > \lambda_c$, cette solution ne reste pas stable et une transition correspondant à l'état de flambage existe. La symétrie angulaire a été réduite. Dans la description mathématique de ce problème, l'instabilité correspond à une bifurcation de solution.

Enfin il existe des systèmes thermodynamiques ouverts, loin de l'équilibre thermique, qui échangent de la masse ou de l'énergie avec l'extérieur, qui présentent l'équivalent d'un changement de phase à certaines valeurs critiques d'un paramètre de contrôle lié au flux extérieur. Ici l'état de basse symétrie peut avoir une remarquable organisation spatiale. On parle dans ce cas de "structures dissipatives" [7]. C'est le cas de certaines réactions chimiques (ex. Belousov-Zhabotinsky), des instabilités électriques et d'un grand nombre d'instabilités hydrodynamiques.

Dans la description de l'instabilité de Rayleigh-Bénard qui va suivre, on se servira d'une part des analogies avec les transitions de phase de 2ème ordre (sans oublier toutefois les caractères spécifiques de ce système hors de l'équilibre thermodynamique), d'autre part les concepts des theories des bifurcations.

3.3. *Théorie de Landau*

La première appplication de ce type d'approche phénoménologique, est l'utilisation formelle de la théorie de Landau des transitions de phase. [8]

Elle consiste à développer l'énergie libre en série de puissances du paramètre d'ordre, au voisinage de la température critique T_c. De la même

façon,nous utiliserons une fonctionnelle Φ(ou pseudo potentiel) pour exprimer les conditions d'équilibre local au voisinage du point d'instabilité (ou première bifurcation à R_c).

Nous nous bornerons ici à considérer la convection établie avec des champs de température et de vitesse bidimensionnels de périodicité spatiale Λ_o, comme on les rencontre dans le cas de rouleaux convectifs.

La périodicité spatiale dans une seule dimension horizontale (x) nous permet d'écrire, au voisinage du seuil de la convection, des champs de vitesse v_i (i = x ou z : dim. verticale) et perturbations de température θ (= T - $T_{\text{état conductif}}$) du type :

$$\left.\begin{matrix} V_x \\ V_z \\ \theta \end{matrix}\right\} \sim f(z)\cos(q_o x + \varphi) \qquad (q_o = \frac{2\pi}{\Lambda_o})$$

avec des amplitudes $\tilde{V}_i$ et $\tilde{\theta}$. La fonction f(z) doit tenir compte des conditions aux limites horizontales. De plus les amplitudes $\tilde{V}_i$ et $\tilde{\theta}$ peuvent être une fonction lente des coordonnées spatiales, à cause des inhomogénéités spatiales, traduisant par exemple l'effet des conditions aux limites aux parois latérales. Dans chaque transition de phase,on doit choisir une grandeur physique qui va représenter de façon pertinente le paramètre d'ordre.

L'apparition du mouvement convectif ($v_i \neq 0$) entraine celle de la perturbation de température θ , et une augmentation du flux de chaleur (mesuré adimensionnellement comme (N-1)-N :nombre de Nusselt). Au voisinage du seuil,toutes ces valeurs, ainsi que la fonction courant ou la vorticité horizontale,sont proportionnelles à l'amplitude $\tilde{V}$ de vitesses (ou à son carré pour N-1). Donc on peut choisir indifféremment comme paramètre d'ordre $\tilde{V}$ ou $\tilde{\theta}$.

Selon la valeur du nombre de Prandtl, on peut considérer que ce sont plutôt les perturbations de température ou la vitesse convective qui seront le paramètre d'ordre le mieux représentatif de la physique du phénomène. (à $Pr \to \infty$ ce sont les perturbations de température qui gouvernent l'instabilité, au contraire à $Pr \to 0$ c'est le comportement de la vitesse qui gouverne l'instabilité).

Au voisinage du seuil de convection, il y a toujours une relation linéaire entre v et θ. Pour des raisons de commodité expérimentale (mesure locale de vitesses par anémomètrie laser), nous choisirons de travailler avec l'amplitude d'une composante de vitesse comme paramètre d'ordre pour développer la fonctionnelle Φ . (Fig. 2).

On peut, donc écrire $\Phi = \Phi_o + \sum_{n=1} a_n(R)\ \tilde{V}^n$, en négligeant les variations spatiales de $\tilde{V}$ dans un premier temps.

Dans le cas le plus général où il existe des symétries de propriétés convectives par rapport au plan médian de la couche de fluide ($z = h/2$), il y aura équiprobabilité pour que, en un point donné, la vitesse ait un sens ou le sens opposé. La fonctionnelle Φ doit être invariante par rapport à ce changement de signe (qui correspond à un changement de phase de π , pour la caractéristique spatiale $v_i = f(x)$, qui change $\tilde{V}$ en $-\tilde{V}$). Cette invariance impose qu'il ne peut y avoir de termes impairs dans le développement de Φ .

$$\Phi = \Phi_o + \sum_{p=1} a_{2p}(R)\ \tilde{V}^{2p}$$

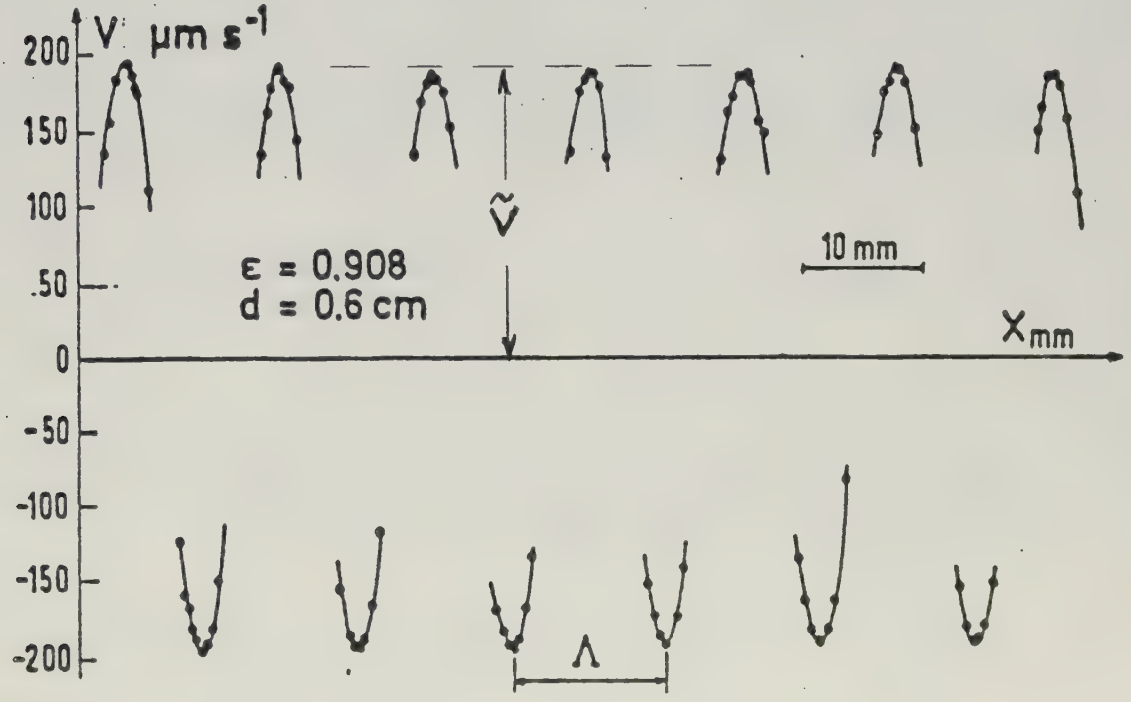


Figure 2. Valeur maximale (selon z) d'une composante de vitesse.

3.4. *Potentiel*

Le concept d'équilibre est relié ici à l'existence d'extrèma de ce potentiel, et à la stabilité au voisinage de ces extréma.

Un modèle simple de bille dans ce potentiel peut nous guider sur les termes à retenir dans le développement en série, et sur la forme des coefficients, pour faire une description phénoménologique de l'instabilité Rayleigh Bénard.

Si on se limite à l'ordre 4, $\Phi = \Phi_o + a\,\tilde{V}^2 + b\,\tilde{V}^4$, on voit dans la figure 3 types différents de potentiel.

La deuxième colonne ($b < 0$) décrit bien notre situation si le paramètre a change de signe à la transition $R = R_c$. ($a > 0$ pour $R > R_c$). De plus b doit avoir un signe différent de celui de a (pour $R > R_c$) de façon à rendre compte de la valeur finie de la vitesse. Pour R voisin de R_c, le développement peut se limiter à l'ordre 4. Le changement de signe du coefficient a, avec R, est pris en compte avec un choix de la forme $a \sim (R - R_c)$, de façon qu'on peut écrire

$$\Phi = \Phi_o + \left(\frac{R - R_c}{R_c}\right) \frac{\tilde{V}^2}{2} - \left(\frac{1}{V_o^2}\right) \frac{\tilde{V}^4}{4}$$

La condition d'"équilibre" (en toute rigueur : la solution la plus probable) est donnée pour les extréma de Φ $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{V}} = 0\right)$

$$\tilde{V} = 0 \qquad \text{(instable pour } R > R_c\text{)}$$

$$\tilde{V} = \pm \sqrt{\frac{a}{-2b}} = \pm V_o \left(\frac{R - R_c}{R_c}\right)^{1/2} \qquad (R > R_c)$$

Ce résultat indique que la dépendance du paramètre d'ordre en fonction de la distance relative au seuil $\varepsilon = (R - R_c)/R_c$, est une loi de puissances, avec un exposant "critique" $\beta = 1/2$ $(\tilde{V} = V_o\ \varepsilon^{\beta})$.

Ce résultat simple est en accord avec les calculs non-linéaires que l'on peut faire à partir des équations de l'hydrodynamique qui décrivent le problème, [4]et a été vérifié de façon expérimentale, par des mesures directes du paramètre d'ordre (vitesse convective), en 1975, par Bergé et Dubois [9].

3.5. *Densité spatiale de potentiel*

Une généralisation de ce potentiel peut être faite dans le cas où il existe de lentes variations spatiales de l'amplitude $\tilde{V}(x)$.

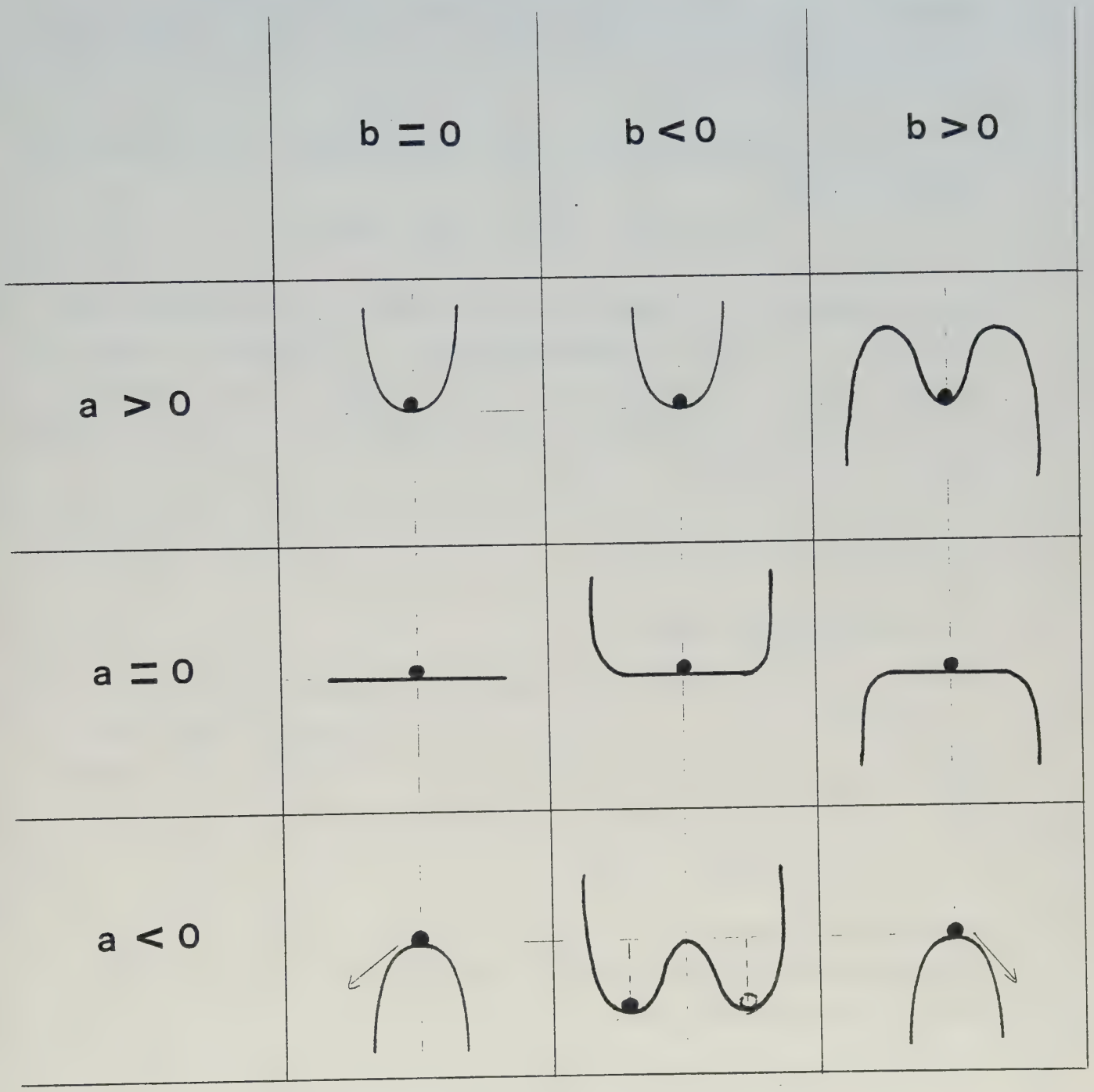


Figure 3

La structure spatiale périodique en rouleaux implique des variations "rapides" en $\cos(q_o x)$ pour les composantes de la vitesse, sur des longueurs de l'ordre de Λ . Une variation lente correspondra à une variation de $\tilde{V}$ sur une distance L, telle que $L >> \Lambda$.

On peut, dans ce cas, définir une densité de potentiel, de type Landau-Ginzburg [10], qu'on développe aussi en série de puissances de $\vec{grad}\ \tilde{V}$. Comme il n'y a pas dans la couche de liquide de côté préférentiel, on doit avoir invariance pour $\pm\ \vec{grad}\ \tilde{V}$; ainsi on ne retient que des termes d'ordre pair du $\vec{grad}\ \tilde{V}$.

Un seul terme est suffisant pour tenir compte des variations spatiales lentes, en $\tilde{V}(x)$:

$$\varphi \sim \varphi_o + \frac{\varepsilon \tilde{V}^2}{2} - \frac{\tilde{V}^4}{4V_o^2} + \frac{1}{2}\ \xi_o^2\ \ (\vec{grad}\ \tilde{V})^2$$

où le paramètre ξ_o à la dimension d'une longueur. ξ_o est analogue à la grandeur de la longueur de correlation, dans les transitions de phase, qui mesure la portée des interactions à longue distance. Ici, par analogie, c'est la grandeur caractéristique de la perturbation d'un domaine convectif, soumis à des hétérogéneités spatiales de vitesse.

Le potentiel Φ correspond à l'intégrale de la densité de potentiel φ sur la dimension de la boite.

3.6. *Equation de mouvement.*

Les conditions d'évolution temporelle (ou dynamiques) peuvent être considérées à partir des variations autour de la position d'équilibre ($\frac{\delta\phi}{\delta V} = 0$), comme une sorte d'accélération proportionnelle à ces variations ; donc au premier ordre l'équation de mouvement peut être :

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} = -\Gamma\ \frac{\delta\phi}{\delta V}$$

qui, avec des conditions aux limites du type $\tilde{V}$ ou $\vec{grad}\ \tilde{V}$ nul, donnent l'équation suivante du mouvement ou équation d'amplitude [11] ($\Gamma = \tau_o^{-1}$, est une constante cinétique)

$$\frac{\delta\phi}{\delta V} = \frac{\delta}{\delta V}\ \frac{1}{L} \int dx \left[\frac{\varepsilon \tilde{V}^2}{2} - \frac{\tilde{V}^4}{4V_o^2} + \xi_o^2\ (\vec{\nabla}\tilde{V})^2 \right] \Rightarrow$$

$$\tau_o \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} = \varepsilon \tilde{V} - \frac{\tilde{V}^3}{V_o^2} + \xi_o^2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2} \quad .$$

Ceci représente l'équation fondamentale permettant de décrire l'ensemble des propriétés statiques et dynamiques au voisinage du seuil d'instabilité.

CHAPITRE 4

EQUATION POUR L'AMPLITUDE

4.1. *Equations hydrodynamiques.*

Les équations qui décrivent la convection de Rayleigh-Bénard sont celles (cf. Ch. II) de Navier-Stokes (1), de la chaleur (2), de continuité (3) et d'état (4) . Pour un fluide incompressible :

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}\right) = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{v} + \vec{f} \qquad (1)$$

$$\rho\, Cp\left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})T\right) = \lambda \Delta T \qquad (2)$$

$$\vec{\nabla}.\vec{v} = 0 \qquad (3)$$

$$\rho = \rho_o(1 - \alpha T) \qquad (4)$$

On utilise l'approximation de Boussinesq, qui consiste à supposer constantes les propriétés physiques du fluide (sauf la densité dans le terme de force -force d'Archimède -).

Pour les nombres de Rayleigh R plus petits que R_c, la seule solution stationnaire est celle de l'état conductif : $\vec{v} = 0$, $T(z) = (T_o + \Delta T) - (\Delta T/d)z$ et $\tilde{p}(z) = \tilde{p}_1 - \rho_o g z$ $(\tilde{p}_1 = \tilde{p}(0))$. Elle est stable pour $R < R_c$; pour $R > R_c$ cette solution devient instable.

Si on note par $\vec{v}$, θ et p les déviations par rapport aux solutions de l'état conductif , et en prenant d (hauteur de la couche) comme unité de longueur, d^2/κ (temps caractéristique de diffusion thermique) comme unité de temps, ΔT pour la température et $\rho_o \kappa \nu / d^2$ pour la pression, on obtient les équations suivantes :

$$\begin{cases} P^{-1}\left(\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\underline{\vec{v}}.\underline{\vec{\nabla}})\underline{\vec{v}}\right) = -\vec{\nabla} p + \Delta \vec{v} + R\theta \hat{z} & (4) \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial t} + \underline{\vec{v}}.\underline{\vec{\nabla}}\theta = \Delta\theta + v_z & (5) \\ \vec{\nabla}.\vec{v} = 0 & (6) \end{cases}$$

où les termes soulignés sont des termes non-linéaires.

Notons qu'à la limite $P \to \infty$, l'équation de Navier-Stokes devient linéaire.

La résolution des équations linéarisées permet d'obtenir la valeur critique du paramètre R. Pour celà il est utile d'éliminer la pression. Rappelons que l'opérateur double rotationnel $\vec{\nabla}\Lambda\vec{\nabla}\Lambda = \vec{\text{grad}}$ divergence - laplacien ; ainsi en appliquant cet opérateur à l'équation de Navier-Stokes (4), tout en utilisant (6) et en effectuant le produit scalaire avec le vecteur unitaire $\hat{z}$, on obtient les équations linéarisées du problème :

$$\begin{cases} P^{-1} \dfrac{\partial \Delta v_z}{\partial t} = \Delta\Delta\, v_z + R\, \Delta_h \theta & (4') \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial t} = v_z + \Delta\theta & (5') \end{cases}$$

où Δ_h est le laplacien horizontal : $\partial_x^2 + \partial_y^2$.

Ce système exprime clairement le couplage entre le champ de vitesse et de température.

On peut décrire ce système avec une équation équivalente du 6ème ordre :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\left(P^{-1}\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\Delta\theta = R\,\Delta_h\theta \qquad (7)$$

Par ailleurs il existe une autre équation semblable pour la composante v_z de la vitesse. v_z peut être décomposé en modes $\sim \sin(qx)$, de nombre d'onde q de telle façon que $v_z = a(t)f(z)\sin(qx)$ et l'équation (7) devient

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (q^2 - \partial_z^2)\right]\left[P^{-1}\frac{\partial}{\partial t} + (q^2 - \partial_z^2)\right](q^2 - \partial_z^2)V_z = R\,q^2 V_z. \qquad (7')$$

La résolution de cette équation dépend des conditions aux limites : la condition réaliste (qui est celle de nos expériences) est celle des limites horizontales rigides en haut et en bas de la couche (en z = 0 et z = d) ; les parois étant isothermes 1) : $\theta\big|_{z=0,d} = 0$; et 2) : $v_z\big|_{z=0,d} = 0$ (imperméabilité) et 3) : $v_h\big|_{z=0,d} = 0$ (adhérence). Cette dernière condition peut être remplacée, en utilisant l'équation de continuité, par 3') : $\dfrac{\partial v_z}{\partial z}\Big|_{z=0,d} = 0$, et la condition 1) est équivalente à : $\left(\dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\Delta v_z\Big|_{0,1} = 0$.

Les solutions sont explicitées dans la publication I.

Afin d'illustrer l'obtention d'une équation d'amplitude (ou modèle simplifié pour la convection faiblement non-linéaire) nous allons étudier

ici la résolution simple de l'équation (7') dans le cas idéal de parois horizontales isothermes libres. Dans ce cas les conditions limites sont :

$$1) : \theta\Big|_{z=0,d} = 0 \quad ; \quad 2) : v_z\Big|_{z=0,d} = 0 \text{ et } 3) : \frac{\partial v_x}{\partial z}\Big|_{z=0,d} = \frac{\partial v_y}{\partial z}\Big|_{z=0,d} = 0$$

qui devient, par l'équation de continuité : $\dfrac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\Big|_{z=0,d} = 0.$

Les conditions aux limites sont remplies par les fonctions circulaires $f(z) \sim \sin n\pi z$ (on prendra ici n=1).

Une étude de la stabilité de l'équation (7') se fait avec des solutions de type $\sim e^{\sigma t}$.

Donc, pour des conditions libre-libre, des solutions $v_z = V_o\, e^{\sigma t} \sin(qx) \sin(\pi z)$ vérifient les conditions aux limites, et l'équation (7') devient :

$$\sigma^2 A - \sigma A^2 (1+P) + PA^3 + PRq^2 = 0 \qquad (8)$$

ou $$A = -(q^2 + \pi^2)$$

4.2. *Taux de croissance des fluctuations*

A partir de la relation (8), on obtient une loi pour $\sigma = \sigma(q,R)$, le taux de croissance des perturbations de vitesse pour le mode spatial horizontal de vecteur d'onde q, à une valeur de R donnée.

Le "principe d'échange de stabilité" ou condition de stabilité marginale -partie réelle $Re\sigma = 0$- donne la limite entre l'état conductif et l'état convectif ($Re\,\sigma < 0$: les perturbations sont amorties, $Re\,\sigma > 0$ elles sont amplifiées et la convection se développe).

La condition $\sigma(q,R) = 0$ donne une loi ou relation $R = R_o(q)$ qui représente la courbe de stabilité marginale $R_o(q) = (q^2+\pi^2)^3/q^2$. Cette courbe a un minimum pour $q = q_c = \pi/\sqrt{2}$ ($R_c = R(q_c) = 27\pi^4/4$). (Fig.1)

Pour $R > R_c$ on note l'existence d'une bande permise de nombre d'ondes $\delta q = q - q_c$, pour lesquelles on a un taux positif d'amplification. Ceci veut dire qu'un ensemble de modes $V_q \sim \sin qx$ pour $q \in [q-\delta q, q+\delta q]$, peut être linéairement stable, mais chacun a des constantes de temps différentes, car $\sigma = \sigma(q,R)$.

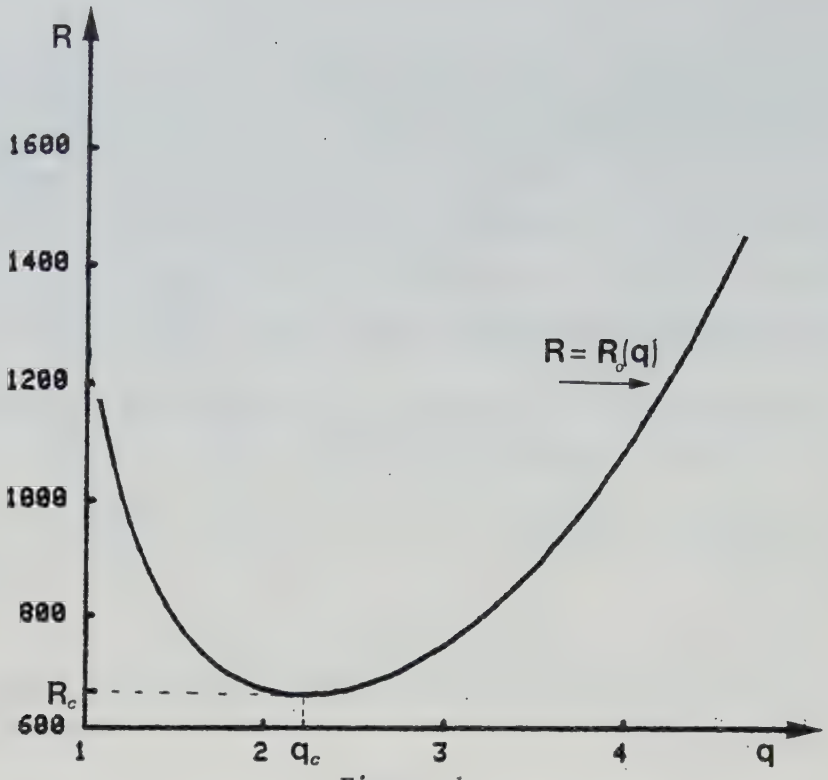


Figure 1

Au voisinage du seuil d'instabilité, $\sigma(q,R)$ peut être développé en double série de Taylor [13] , pour connaître sa variation en fonction de q (σ est réel)

$$\sigma(q,R) \simeq \sigma(q_c,R_c) + \left.\frac{\partial\sigma}{\partial R}\right|_{q_c,R_c} (R-R_c) + \left.\frac{\partial\sigma}{\partial q}\right|_{q_c,R_c} \delta q +$$

$$+ \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2\sigma}{\partial q^2}\right|_{q_c,R_c} \delta q^2 + \left.\frac{\partial^2\sigma}{\partial q\partial R}\right|_{q_c,R_c} \delta q\,(R-R_c) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2\sigma}{\partial R^2}\right|_{q_c,R_c} (R-R_c)^2 +$$

$$+ \frac{1}{6}\left.\frac{\partial^3\sigma}{\partial q^3}\right|_{q_c,R_c} \delta q^3 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^3\sigma}{\partial q^2\partial R}\right|_{q_c,R_c} \delta q^2\,(R-R_c) + \ldots \qquad (9)$$

$\sigma(q_c,R_c) = 0$, car c'est la définition du nombre de Rayleigh critique.

$\left.\frac{\partial\sigma}{\partial q}\right|_{q_c,R_c} = 0$, car qu'il y a un extremum ($\sigma = 0$) pour $q = q_c$, et $\sigma < 0$ pour d'autres q.

Sur la courbe de stabilité marginale, $\sigma = 0$, on peut voir que $\delta q^2 \sim (R-R_c)$, à l'ordre le plus bas (approximation parabolique). Les termes d'ordre suivants vont être de la forme $\delta q(R-R_c)$ et δq^3, donc ils sont d'ordre $(R-R_c)^{3/2}$.

Pour le cas libre-libre, on a, avec $\varepsilon = \frac{R - R_c}{R_c}$, où $R_c = \frac{27\pi^4}{4}$, et $q_c = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, l'expression suivante pour σ , qu'on obtient en décrivant l'éq. (8)

$$\sigma(q,R) \simeq \sigma_o \left(\varepsilon - \frac{4}{3q_o^2} (q - q_c)^2 \right) + O(\varepsilon^{3/2}) \qquad (10)$$

où les termes d'ordre supérieur sont :

$$O(\varepsilon^{3/2}) : \sigma_o \left[\frac{2}{3q_c} (q - q_c)\varepsilon + \frac{4}{27q_c^3} (q - q_c)^3 \right]$$

L'expression (10) peut se réécrire comme :

$$\sigma(q,R) = \sigma_o [\varepsilon - \xi_o^2 (q - q_c)^2] + O(\varepsilon^{3/2}) \qquad (11)$$

où :

i) $\sigma_o = R_c \left.\frac{\partial \sigma}{\partial R}\right|_{q_c, R_c} = \frac{3\pi^2 P}{2(1+P)}$ est égale à τ_o^{-1}, et τ_o est la valeur du temps caractéristique de relaxation des fluctuations (adimensionalisée à d^2/κ). Pour $q = q_c$, on obtient $\tau = \tau_o \varepsilon^{-1}$, qui exprime le ralentissement critique (τ diverge quand $\varepsilon \to 0$).

ii) $\xi_o^2 = - \frac{1}{2\sigma_o} \left.\frac{\partial^2 \sigma}{\partial q^2}\right|_{q_c, R_c} = \frac{4}{3q_c^2}$ ou $\frac{8}{3\pi^2}$; ξ_o a la dimension d'une longueur (ici ξ_o est adimensionalisée par d), et on verra plus loin qu'elle correspond à la grandeur analogue à la longueur de corrélation signalée au chapitre précédent. Pour $\sigma = 0$, $\varepsilon \simeq \xi_o^2 (q - q_c)^2$ et on peut calculer ξ_o^2 comme la courbure de la courbe de stabilité marginale :

$\xi_o^2 = \frac{1}{2R_c} \left.\frac{\partial^2 R}{\partial q^2}\right|_{q=q_c}$, qui est unique pour toutes les valeurs du nombre de Prandtl (comme l'est R_c) : ξ_o a un caractère universel, ce qui n'est pas le cas pour τ_o.

4.3. Equation d'amplitude.

La relation (10) correspond à des variations temporelles de la vitesse amplifiée selon $v_q \sim e^{\sigma t}$. On a la relation linéaire :

$$\dot{v}_q = \sigma v_q \qquad , \qquad (12)$$

pour chaque mode de Fourier de vecteur d'onde q.

Si on exprime $v_q = a_q(t)\ f(z)\ \sin(qx)$, pour le mode critique $q = q_c$ -pour lequel $\sigma = \sigma_o \varepsilon^{-1}$-, on peut vérifier [14] que des termes non linéaires doivent apparaître, assurant la saturation de la vitesse pour l'état final stationnaire. Une équation pour l'amplitude $a_q(t)$ du mode critique sera de la forme :

$$\frac{da_q}{dt} = \varepsilon a_q - a_q^3 \tag{13}$$

Cette équation est valable pour $R \to R_c$, et avec homogénéité spatiale absolue (cas de géométrie infinie).

On voit que le terme non linéaire est de l'ordre $O(\varepsilon^{3/2})$, car à l'équilibre $a_q \sim O(\varepsilon^{1/2})$. Ce type d'approximation, très important pour l'étude de la dynamique du mode critique, a été développé par Landau pour l'étude de la transition à la turbulence [15].

Dans le cas réel de boites finies, les conditions de frottement aux parois imposent des conditions aux limites différentes de celles périodiques, empêchant l'existence d'un seul mode pur. Comme la courbe de stabilité marginale autorise l'existence d'une bande finie de modes centrée sur le mode critique q_c, une solution de type "paquet d'onde" peut être construite Elle permet de satisfaire aux conditions de parois. Cette solution est composée d'une superposition de modes de Fourier permis, centrés sur le nombre d'onde optimum (critique, pour $R \to R_c$)

$$v_i = \sum_{q \in \Delta q} v_q \sin qx \simeq \tilde{V}(x) \sin q_c x + O_1(\varepsilon) + O_2(\varepsilon^{3/2})$$

où $\tilde{V}(x)$ est une amplitude qui change lentement avec la position, sur des distances $L(\sim\xi)$, plus grandes que Λ.

Si on développe, par commodité, en e^{iqx} et que l'on considère $\tilde{V}$ réel :

$$\dot{v}_i(x) = \mathrm{Re} \sum_{q \in \Delta q} \dot{v}_q\, e^{iqx} \ ,$$

et comme chaque mode a un facteur d'amplification σ_q (voir (12)) on a :

$$\dot{v}_i(x) = \mathrm{Re} \sum_{q \in \Delta q} \sigma(q,R)\, v_q\, e^{iqx} \ ,$$

et d'après (11) :

$$\dot{v}_i(x) = \mathrm{Re} \sum_{q \in \Delta q} \sigma_o[\varepsilon - \xi_o^2 (q - q_c)^2]\, v_q\, e^{iqx} \tag{14}$$

comme $v_i(x) = \text{Re}\ \tilde{V}\, e^{iq_o x}$, on peut écrire

$$\tilde{V}(x) = \text{Re} \sum_{q \in \Delta q} v_q\, e^{i(q - q_o)x} ,$$

l'amplitude est développée en termes de fréquences spatiales $(q - q_o)$, et

$$\frac{\partial^2 \tilde{V}(x)}{\partial x^2} = - \text{Re} \sum_{q \in \Delta q} (q - q_o)^2\, v_q\, e^{i(q - q_o)x}$$

En remplaçant dans (7) on a (avec $\sigma_o = \tau_o^{-1}$) :

$$\tau_o \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} = \varepsilon \tilde{V} + \xi_o^2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2} \qquad (15)$$

Jusqu'ici l'analyse est linéaire, les termes de saturation non linéaires doivent être ajoutés. Les considérations de symétrie faites précédemment (ch. II) dans la description d'un modèle de potentiel nous amènent à prendre des corrections non linéaires $\sim \tilde{V}^3$. Ceci correspond à l'ordre auquel nous avions développé le facteur d'amplification $\sigma(q,R) \sim O(\varepsilon^1)$ multiplié par $\tilde{V} \sim O(\varepsilon^{1/2})$. L'équation d'amplitude (15) est donc bien d'ordre $O(\varepsilon^{3/2})$, correspondant à la correction $\tilde{V}^3 \sim O(\varepsilon^{3/2})$.

L'équation pour l'enveloppe $\tilde{V}(x)$ est (cf. ch. II)

$$\tau_o \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} = \varepsilon \tilde{V} + \xi_o^2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2} - \frac{\tilde{V}^3}{V_o^2} \qquad (16)$$

ou

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} = - \tau_o^{-1} \frac{\delta \Phi}{\delta \tilde{V}} .$$

Les particularités des conditions aux limites horizontales telles que libre-libre, rigide-libre, rigide-rigide ne changent pas ce type de description, car ces conditions changent seulement la fonction f(z) dans la description des composantes de vitesse ou perturbations de température, et en conséquence, la fonction $\sigma(q,R)$. Ces différentes conditions ne font que changer les valeurs des paramètres R_c, σ_o et ξ_o, toujours calculées à partir de σ, $\frac{\partial \sigma}{\partial R}$ et $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial q^2}$ respectivement, dans le problème linéarisé. Par contre la valeur de $\tilde{V}_o$ provient de l'analyse non linéaire du problème.

On a donc une équation unique dans laquelle les coefficients ou paramètres changent en fonction du type de conditions mécaniques aux parois horizontales (toujours isothermes). Pour d'autres instabilités hydrodynamiques, on peut faire des analyses en modes normaux $\sim e^{iqx}$, de manière à trouver la loi correspondante $\sigma = \sigma(q,R)$, et faire le calcul de R_c, σ_o et ξ_o. L'équation d'amplitude sera établie de la même façon. Les détails "microscopiques" sur l'instabilité ne joueront que sur les valeurs de R_c, σ_o, ξ_o et $\tilde{V}_o$ (qui peuvent être aussi imaginaires), mais le comportement "macroscopique" -l'équation- aura des caractéristiques analogues.

Dans le tableau suivant, on résume ces valeurs pour quelques autres instabilités ayant le même type de transition continue :

TABLEAU II

Instabilité	R_c	$\tau_o/(d^2/\kappa)$	$\xi_o^2/(d^2)$	$\tilde{V}_o/(\kappa/d)^*$ $(P \to \infty)$	$\eta = \xi_o . q_o$
Rayleigh Bénard avec parois libre-libre :	$\frac{27\pi^4}{4}$	$\frac{2(1+P)}{3\pi^2 P}$	$\frac{8}{3\pi^2}$	$\frac{\sqrt{2}\xi_o}{\tau_o}$	1.15
rigide-rigide :	1708	$\frac{1+1.95P}{38.44P}$	0.148	11.82×10^{-4}	1.20
Rayleigh Bénard en milieu poreux : [16]	$4\pi^2$	$\frac{1}{2\pi^2}$	$\frac{1}{\pi^2}$	4π	1

* V_o : amplitude de la composante v_z.

4.4. *Autres types d'approche*

Dans ce chapitre on a donné une approche phénoménologique de l'établissement de l'équation d'amplitude. Mais il existe des analyses plus systématiques qui conduisent à établir cette équation à partir des équations non linéaires du problème, à condition d'être suffisamment près du seuil R_c [11,13]. Une technique utilisée est celle des méthodes perturbatives avec des échelles multiples de temps et de distance, en considérant qu'il existe deux échelles bien différenciées. Pour la partie spatiale il y a, d'une part des variations rapides (rouleaux) d'échelle Λ , et d'autre part des variations lentes

(modulation d'amplitude) d'échelle $\xi = \xi_o \varepsilon^{-1/2}$. Il en est de même pour la partie temporelle avec des variations rapides en d^2/κ et une variation lente (temps caractéristique d'amortissement critique) donnée par $\tau = \tau_o \varepsilon^{-1}$. La méthode des échelles multiples consiste à découpler ces deux variations rapide et lente (chose qui n'est significative qu'au voisinage du seuil de convection -ε petit-). Tout se passe donc comme s'il y avait deux variables indépendantes et les dérivées $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial t}$ sont transformées en

$$\frac{\partial}{\partial x} \to \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\varepsilon^{1/2}}{\xi_o} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\varepsilon^{1}}{\tau_o} \frac{\partial}{\partial t}$$

D'autre part on fait un développement perturbatif en série de puissance de ε pour la vitesse et la température. Les équations de Boussinesq, réécrites de cette façon, permettent d'établir une série d'équations pour chaque ordre en ε . La première équation non triviale est d'ordre $\varepsilon^{3/2}$, et on aboutit à l'équation d'amplitude telle que nous l'avons écrite.

4.5. *Validité et conséquences des équations d'amplitude* :

Il y a quelques limitations dans l'approche précédente pour la description des propriétés des mouvements convectifs au voisinage du seuil R_c.

i) Nous avons considéré jusqu'à présent une amplitude réelle V, qui est la valeur maximum des composantes de vitesse $v_i = \tilde{V} \sin (q_o x + \varphi)$. Aucun compte n'a été tenu de la phase φ , qui décrit la position des rouleaux. [38]

La possibilité d'introduire ce concept dans une amplitude complexe $\tilde{V} e^{i\varphi} = \bar{\bar{V}}$ laisse inchangée cette description, telle qu'on le verra dans l'introduction de la publication VI, concernant la dynamique de φ . (ch.9).

ii) Cette description est valable au voisinage du seuil de convection où le champ de vitesse est bien décrit en terme d'une seule fréquence spatiale q_o, sans qu'il soit besoin d'introduire des harmoniques qui rendent compte de la distorsion non-linéaire. [17]

$$v_i = \tilde{V}_{01} \sin qx + \tilde{V}_{02} \sin 2qx + \tilde{V}_{03} \sin 3qx + \ldots$$

où $V_n \sim \varepsilon^{n/2}$.

iii) Telle qu'on l'utilise ici, l'équation d'amplitude est valable à l'ordre le plus bas en ε. En général, pour la description des propriétés au voisinage du seuil, la majorité de ces dernières a été bien vérifiée dans les expériences pour $R \to R_c$. Il y a un aspect de l'application du concept de potentiel qui est plus controversé : c'est celui de la détermination de la valeur optimum de la longueur d'onde. En effet, si on utilise la solution homogène $\tilde{V}_S = V_o\sqrt{\varepsilon - \xi_o^2 \delta q^2}$ (voir ch.9.4), qui est une solution pour des nombres d'onde $q = q_c + \delta q$, le potentiel a des extréma pour

$$(\Phi - \Phi_o) = \frac{\varepsilon \tilde{V}_S^2}{2} - \frac{\tilde{V}_S^4}{4V_o^2} = -\frac{V_o^2}{2}(\varepsilon - \xi_o^2 \delta q^2)^2$$

et l'extremum absolu est pour $\delta q = 0$, donc $q = q_c$.

Donc l'équation d'amplitude correspond à choisir cette valeur unique pour la longueur d'onde de la structure.

La détermination d'un nombre d'onde $q_{optimum}$ est relié au condition $D_\perp = 0$ [18], (voir ch. 9) pour laquelle l'équation d'amplitude ne peut être calculée qu'à l'ordre le plus bas (voir remarque ii dans 9.4)

iv) Une forme alternative et équivalente pour modéliser le mouvement convectif a été développée en [19]. Elle consiste à développer σ (cf. ch.4.2) en fonction de $(R - R_c)$ et $(q^2 - q_c^2)$, à la place de $(q - q_c)$. Ainsi on a :

$$\sigma = \sigma_o \left[\varepsilon - \frac{\xi_o^2}{4q_c^2}(q^2 - q_c^2)\right]$$

Avec la même approche qu'en 4.3, pour des composantes de vitesse $v_i = \sum_{q \in \delta q} v_q e^{iqx}$, on obtient la relation linéaire :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sigma_o \sum_{q \in \delta q} (\varepsilon - \frac{\xi_o^2}{4q_c^2}(q^4 - 2q^2 q_c^2 + q_c^2))\, v_q\, e^{iqx}$$

où les termes $\sum_q q^n v_q e^{iqx}$ peuvent être remplacés par les dérivées $\partial_x^{(n)}$ pour obtenir :

$$\tau_o \frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon v - \frac{\xi_o^2}{4q_c^2}[\Delta + q_c^2]^2 v ,$$

qui est l'équation ou modèle d'évolution linéaire pour la composante de vitesse (et non pas pour l'amplitude ou enveloppe !).

Pour les termes non linéaires, dans le cas de rouleaux bidimensionnels, la symétrie du problème ($v \leftrightarrow -v$) fait que les termes les plus simples à retenir sont de la forme : $-v^3/V_o^2$. Pour de faibles nombres de Prandtl le poids des non linéarités dans l'équation de Navier-Stokes ($\sim P^{-1}(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}$) est plus important et la forme simple adoptée ici est peut être insuffisante.[41]

ν) Le modèle décrit dans ce chapitre ne considère pas de variations de vitesse dans la direction transversale des rouleaux ($v_y = 0$). Il s'agit donc d'un modèle unidimensionnel. L'existence de modulation de vitesse dans la direction y (voir par exemple fig. 6 ch. 7.2), ou de faibles déformations d'orientation dans les rouleaux, est considérée dans l'existence d'une composante q_y (transversale) du vecteur d'onde $\vec{q}$.

Le développement de σ (taux d'amplification des perturbations) autour du vecteur d'onde critique $\vec{q}_o$ est

$$\sigma = \sigma_o(\varepsilon - \xi_o^2(q - q_o)^2) = \sigma_o(\varepsilon - \xi_o^2((q_x^2 + q_y^2)^{1/2} - q_o)^2)$$

Si le système a une direction privilégiée (axe x, $\vec{q}_o = q_o\hat{x}$), la composante q_y est d'ordre supérieure (Fig.2) et

$$q = (q_x^2 + q_y^2)^{1/2} \simeq q_x \left\{1 + \frac{q_y^2}{2q_o^2}\right\}$$

Donc

$$\sigma \simeq \sigma_o \left[\varepsilon - \xi_o^2 \left(q_x - q_o + \frac{q_y^2}{2q_o}\right)^2\right] \qquad (17)$$

En opérant de la même façon que dans la partie 4.3, on peut remplaçer les termes

$$(q_x - q_o)\tilde{V} \text{ par } -i\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} \text{ et } q_y^2 \tilde{V} \text{ par } -\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial y^2} ,$$

donc on aura une équation pour $\tilde{V}$: $\tilde{V}(x,y,t)$: [11]

$$\tau_o \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} = \varepsilon \tilde{V} + \xi_o^2 \left(\partial_x - \frac{i}{2q_o}\partial_y^2\right)^2 \tilde{V} - \frac{|V|^2 \tilde{V}}{V_o^2} \qquad (18)$$

La dérivé d'ordre supérieur en y correspond au fait que x est l'axe ou direction privilégiée. D'après (17) pour $\sigma = 0$ on a, $(q_x - q_o)^2 \sim \mathcal{O}(\varepsilon)$ et $q_y^4 \sim \mathcal{O}(\varepsilon)$ (Fig.3) et d'après (18) la distance caractéristique sera, pour les

variations en x : $\xi_x = \xi_o \, \varepsilon^{-1/2}$ et pour les variations en y :

$$\xi_y = \frac{\xi_o^{1/2}}{\sqrt{2q_o}} \, \varepsilon^{-1/4} = \frac{\xi_o \varepsilon^{-1/4}}{\sqrt{2\eta}} \quad (\eta = q_o \xi_o) \ .$$

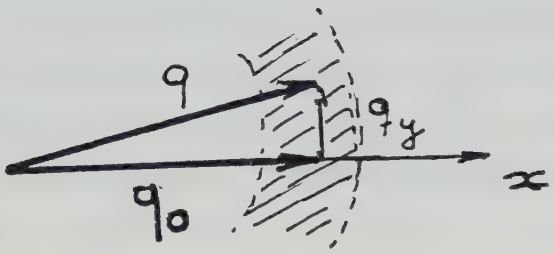


Figure 2

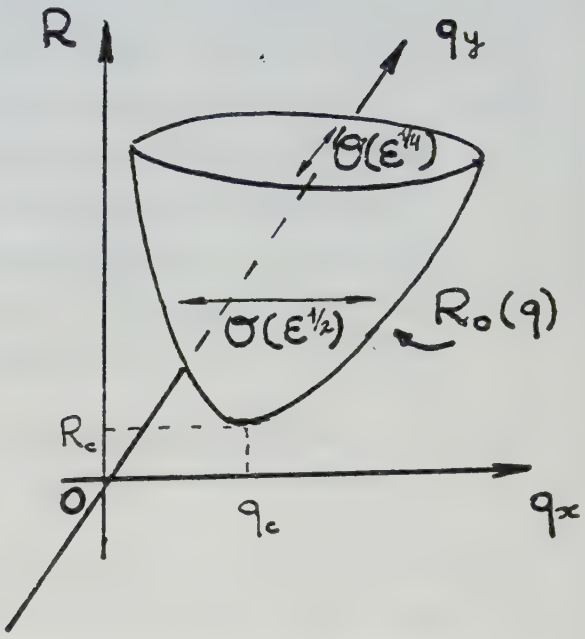


Figure 3

Ces deux longueurs sont les longueurs de cohérence dans la direction longitudinale et transversale respectivement.

L'anisotropie de ξ est liée directement au choix d'une direction priviligiée.

(Quand il existe deux systèmes de rouleaux à $\pi/2$ superposés, on les décrit avec deux équations couplées (18), avec un terme non linéaire supplémentaire croisé $\sim |\tilde{V}_1|^2 \tilde{V}_2$ ou $|\tilde{V}_2|^2 \tilde{V}_1$ [21]).

Une illustration expérimentale de l'effet selon y, est donnée Fig.4 dans le profil de vitesse v_x en fonction de y, selon l'axe d'un rouleau.

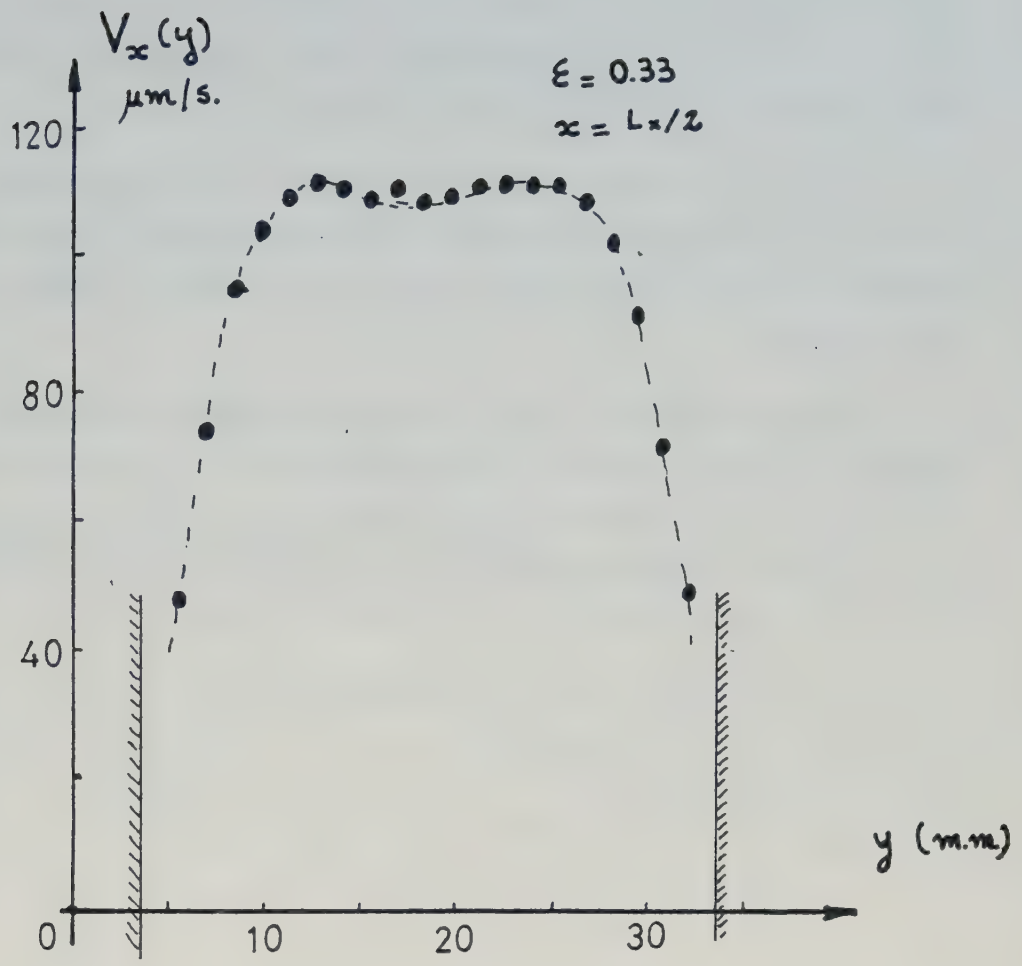


Figure 4

vi) Au voisinage du point d'instabilité ($R < R_c$) il est important de connaitre l'influence des fluctuations thermodynamiques. Ce sont des fluctuations de vitesse et de température $\langle v^2 \rangle = \frac{k_B T}{\rho V_{ol}}$ et $\langle \delta T^2 \rangle = \frac{k_B T^2}{c_v}$ respectivement, avec k_B : cte de Boltzman, T : température absolue, c_v : chaleur spécifique et V_{ol} : volume).

Les fluctuations thermodynamiques induisent des fluctuations dans le paramètre d'ordre $(\tilde{V})$. Pour des valeurs de $|\varepsilon|$ très petites (estimées de l'ordre de 10^{-8} dans notre expérience d'après [37][45]: $\delta(\Delta T - \Delta T_c) \sim 5.10^{-5}$ mK!..) on prévoit une région critique où la valeur quadratique moyenne de ces fluctuations est supérieure au carré de la valeur moyenne du paramètre d'ordre. Remarquons que,dans cette région critique,l'importance de ces fluctuations

rend impossible une analyse de type Landau (il n'y a pas de convergence dans le développement en série du potentiel - cf. 3.3) mais cette région étant innaccessible expérimentalement, ceci justifie a posteriori les approximations faites dans les ch. 3 et 4.

Ceci peut s'exprimer comme un critère de Ginzburg [6] : la longueur de corrélation ξ est macroscopique ($\sim$ d) et beaucoup plus grande que les distances typiques du fluide (distances moléculaires), donc la région classique est très étendue.

Rappelons néanmoins les conséquences prévues théoriquement dans la région critique : Pour des modèles en rouleaux avec une direction privilégiée, il est prévu un remplacement de la transition "brutale" par un arrondi autour de R_c, dans le diagramme paramètre d'ordre/paramètre de contrôle [37] (comme celui dû au champ extérieur ou bifurcation imparfaite dans la section 7.3).

Pour des modèles avec une dégénérescence de rotation, telle que celui du du paragraphe iv), où les dérivées en x et y sont équivalentes, les fluctuation de position sont plus importantes et la transition devient de 1er ordre avec saut fini et hystérésis (effet Brazovskii) [19].

CHAPITRE 5

METHODES EXPERIMENTALES D'ETUDE DE LA CONVECTION

Le couplage entre les champs de vitesse et de température et le transfert de chaleur dans la convection de Rayleigh-Bénard, donne la possibilité d'utiliser différentes méthodes expérimentales.

5.1. *Flux de chaleur*

Ce qui semble le plus naturel dans un phénomène convectif, est la mesure du flux de chaleur [22], qui augmente à la transition conduction → convection. Pour les valeurs $R < R_c$, le flux de chaleur est $\Phi_{cd} = \lambda S\Delta T/d$, où λ est la conductivité thermique, d la hauteur de la couche, S la surface et ΔT la différence de température. Pour $R > R_c$, le flux de chaleur $\Phi_T = \Phi_{cd} + \Phi_{cv}$ augmente. La valeur adimensionnelle de Φ est donnée par le nombre de Nusselt (Fig.1)

$$N_u = \Phi_T/\Phi_{cd} = 1 + \phi_{cv}/\phi_{cd}$$

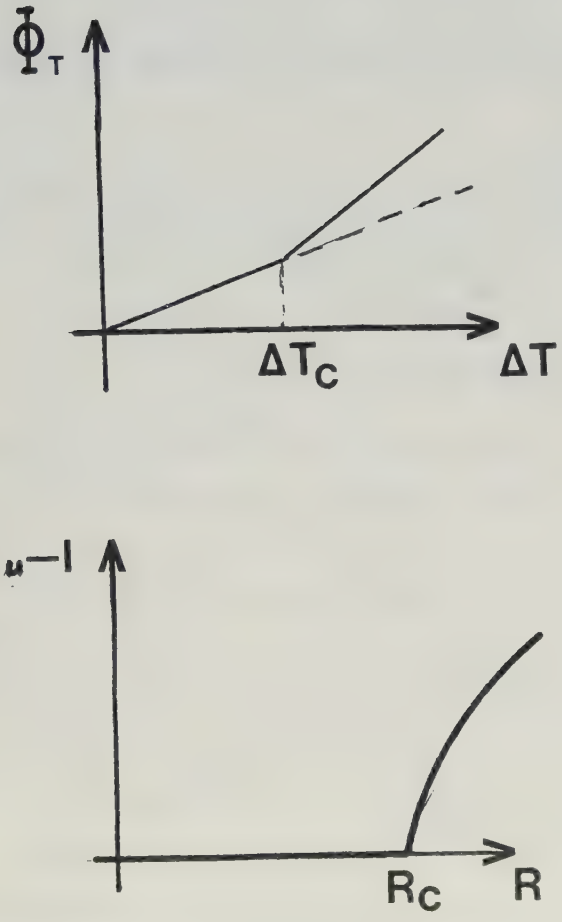


Figure 1.

La mesure du flux de chaleur se fait à partir de la connaissance de la puissance thermique donnée au système. Soit $\sim I^2R$, si le chauffage est électrique ou $\sim Q\delta T$ si la couche est chauffée et/ou refroidie par circulation d'eau (I : intensité du courant électrique, R : résistance, Q ; débit de la circulation et δT : différence de température entre l'entrée et la sortie de la circulation d'eau).

On a aussi l'habitude de considérer $\Phi_T = \lambda_{eff}.S\Delta T/d$ où λ_{eff} tient compte de la convection, et $N_u = \lambda_{eff}/\lambda$.

Les mesures les plus précises du flux de chaleur sont faites à très basses températures, comme dans le cas des expériences effectuées sur l'helium liquide [23]. Ce type de mesure permet de réduire l'inertie thermique ainsi que les pertes et d'avoir une grande sensibilité pour la mesure des températures.

5.2. Mesures de température

Une fois que la convection se développe, le champ de température est modifié. Dans le cas conductif, le gradient de température étant linéaire, les isothermes sont horizontales. Une fois que la convection est présente une modification de ces isothermes se produit : ces lignes se déplacent vers le haut ou vers le bas dans les régions de fluide montant ou descendant (frontières des rouleaux). Les isothermes se ressèrrent dans ces régions et le gradient de température augmente. La différence entre la valeur de la température en présence de convection et celle correspondant au profil linéaire conductif, est donc une fonction périodique de période Λ. Des champs de température peuvent être mesurés avec des thermocouples qui sont immergés dans le liquide ou fixés sur les parois. En général, ils peuvent avoir une influence sur l'écoulement, en particulier en fixant la position (ou phase) des rouleaux.

Des points de mesure isolés dans les plaques isothermes produisent moins de perturbations thermiques.

Dans le cas de convection avec une surface libre, des méthodes d'imagerie infrarouge donnent des cartes des isothermes en surface [24] (voir aussi les transducteurs thermooptiques à cristaux liquides).

5.3. Méthodes optiques de détection thermique

Les méthodes optiques, qui s'appuient sur la variation de l'indice de réfraction, avec la température, restent les plus intéressantes du fait de la non perturbation de l'écoulement par la mesure [25]. Par contre, la visualisation et les mesures absolues de température (ou gradients de température) exigent la bidimensionalité de l'écoulement, de façon à ne pas avoir des variations de température dans la direction de propagation de la lumière. Quand ces conditions ne sont pas remplies, des méthodes plus sophistiquées de traitement de l'information (genre tomographie) permettent, en principe, de reconstituer le champ de température. [26] .

Pour la détermination des isothermes, dans le cas de rouleaux bidimensionnels, une méthode utilisée est celle de l'interférométrie de Mach-Zehner, où les faisceaux de mesures sont parallèles aux axes des rouleaux (fig.2) [27]. Les franges d'interférence correspondent aux isothermes.

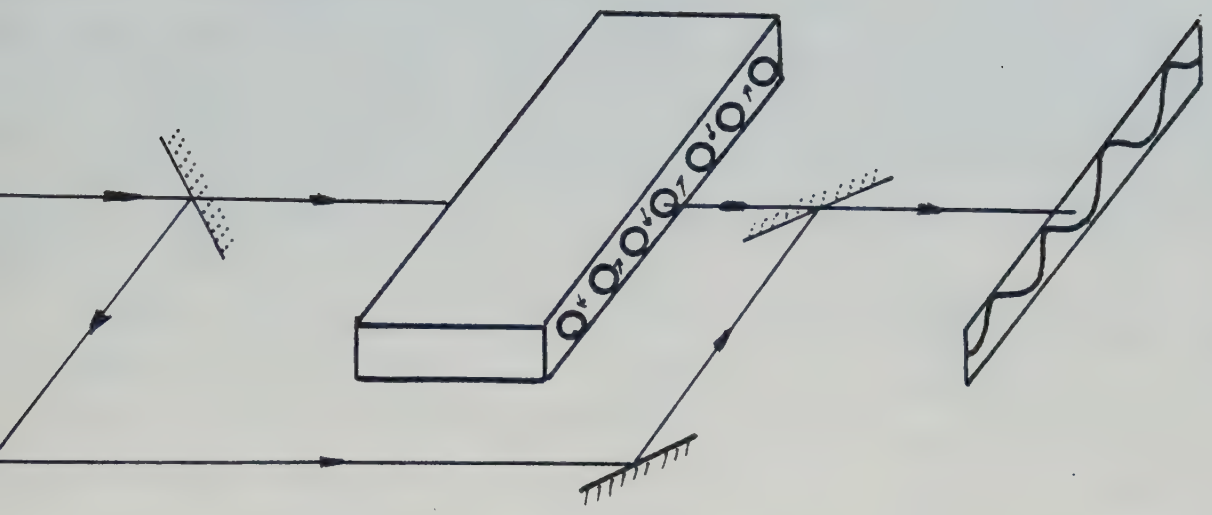


Figure 2.

Cette méthode est très sensible aux vibrations, car le faisceau de référence doit voyager au dehors de la cellule de convection, de même elle est sensible aux imperfections optiques de la cellule (par exemple variations dans l'homogénéité des parois latérales transparentes). Ce dernier aspect peut être corrigé avec l'holographie interférométrique [28], qui permet de soustraire les contributions parasites à la différence de chemin optique, entre l'état conductif et l'état convectif.

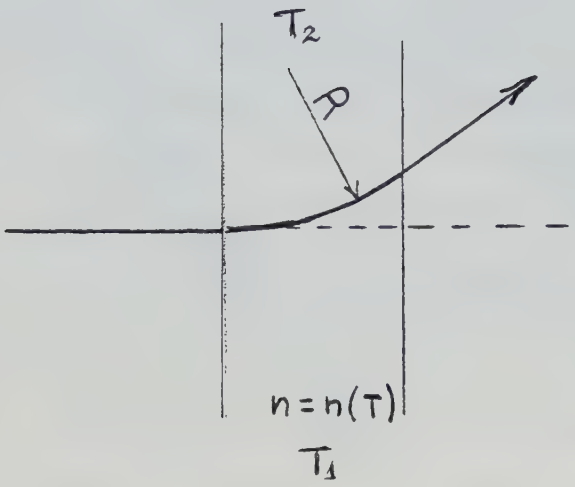
5.4. *Déviation de faisceaux*

Le gradient de température a des effets importants sur la trajectoire des faisceaux : ces derniers sont déviés vers des régions de plus haut indice de réfraction, qui pour les liquides et les gaz, correspondent à des régions plus froides [29] . Selon les lois de l'optique géométrique, le rayon de courbure R de la trajectoire du rayon lumineux est

$$\frac{1}{R} = \vec{e}.\frac{\vec{\nabla}n}{n} \quad , \text{ avec } n = n(T) \quad , \text{ donc}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{n}\frac{dn}{dT}\,(\vec{e}.\vec{\nabla}T)$$

où $\vec{e}$ est le vecteur unitaire, normal au faisceau. (Fig.3).



Si un faisceau étroit, envoyé dans une cellule parallèlement à l'axe des rouleaux (axe y), est balayé selon la dimension horizontale x, on décrit une figure de déflection. Dans le cas de convection bidimensionnelle, on peut exploiter quantitativement la carte des gradients de température ainsi obtenus [30]. La composante horizontale (verticale) de cette déflection est proportionnelle à $\frac{\partial T}{\partial x}$ ($\frac{\partial T}{\partial z}$). Le fait que la déflection est proportionnelle aux gradients, amplifie les contributions non linéaires du champ de température (Fig.4) (par ex. $\theta^{(3)} \sim \theta_o^{(3)} \cos(3qx) \Rightarrow$déflection maximale $\alpha \sim 3q\theta_o^{(3)}$).

Figure 3

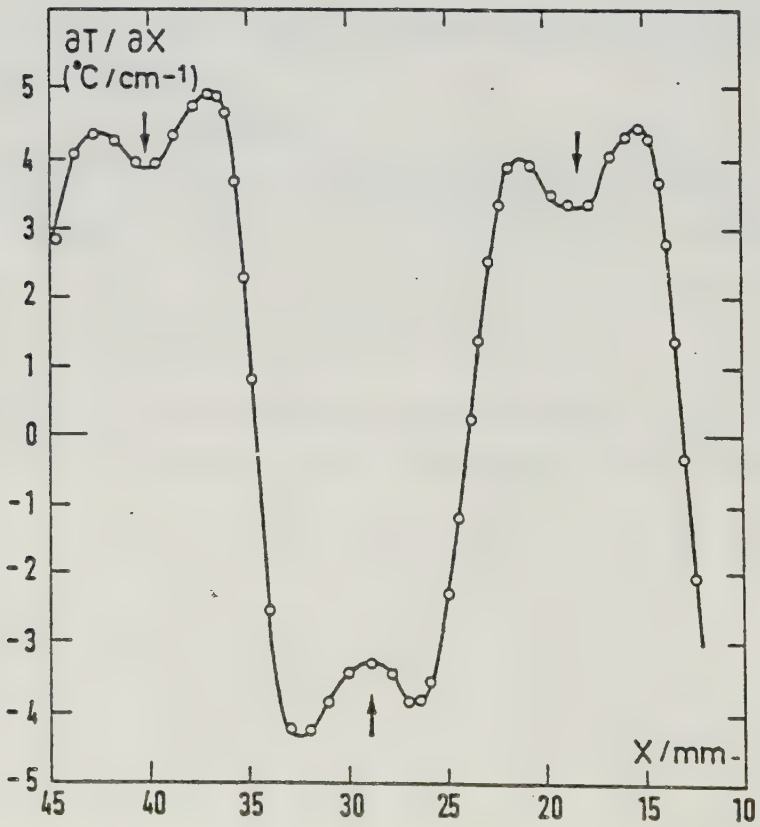


Figure 4

Cette méthode est aussi utile dans la convection instationnaire pour suivre les fluctuations temporelles du champ thermique [25].

Rappel. Comme dans les autres méthodes optiques de détection de la température l'information donnée est liée à la moyenne du gradient de température dans la direction de propagation.

5.5. *Interférométrie différentielle*

A la différence de l'interféromètre de Mach-Zehnder, dans cette méthode, les deux faisceaux lumineux traversent ensemble la cellule, à une distance e. Le long des deux parcours, le milieu liquide a des indices de réfraction n(x) et n(x + e) différents du fait des gradients de température (Fig.5).

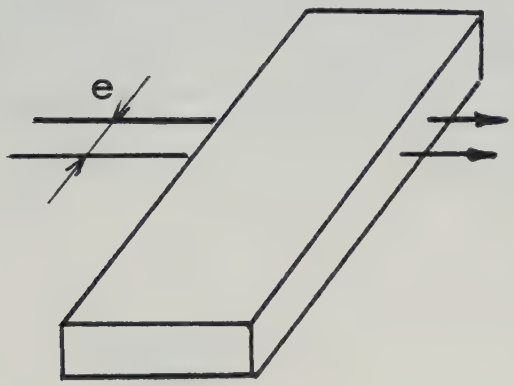


Figure 5

Si on recombine deux à deux toutes les paires de rayons lumineux ayant traversé le milieu, on obtient un interférogramme. Chaque frange correspondra à une ligne d'égale variation d'indice, sur la distance e. En effet, à chaque frange correspond une même différence de chemin optique

$$\ell_1 - \ell_2 = \int_{x_1} n(y)dy - \int_{x_2=x_1-e} n(y)dy$$

mais $n(x_1) = n(x_2) + \Delta n$, où
$\Delta n \simeq \frac{\partial n}{\partial x}$ .e, pour e petit.

Ainsi $\ell_1 - \ell_2 \sim e\int_{x_1} \frac{\partial n}{\partial x}\, dy = \langle\frac{\partial n}{\partial x}\rangle\, e\, L_y$. Et $\frac{\partial n}{\partial x} = (\frac{dn}{dT})\,\frac{\partial T}{\partial x}$.

Deux franges consécutives correspondent à une variation du gradient de température moyen égal à :

$$\Delta\langle(\frac{\partial T}{\partial x})\rangle = \frac{\lambda}{(\frac{dn}{dT}).e\ L_y}$$

où λ est la longueur d'onde de la lumière utilisée et L_y est la longueur de propagation dans la boite.

Les isogradients mesurés sont donc dans la direction de la droite joignant les deux faisceaux, que nous avons notée ici, par la coordonnée x,

qui peut être la direction horizontale (x) ou verticale (z).

Différentes méthodes sont utilisées pour produire la séparation e des faisceaux et leur recombinaison.

Des prismes de Fresnel [31] et de Wollaston [30],[32] peuvent produire la faible séparation de e. Nous avons utilisé une méthode plus simple à partir de la double réflexion de la lumière sur les faces d'entrée et de sortie d'une lame de verre à faces parallèles [33] (Fig.6).

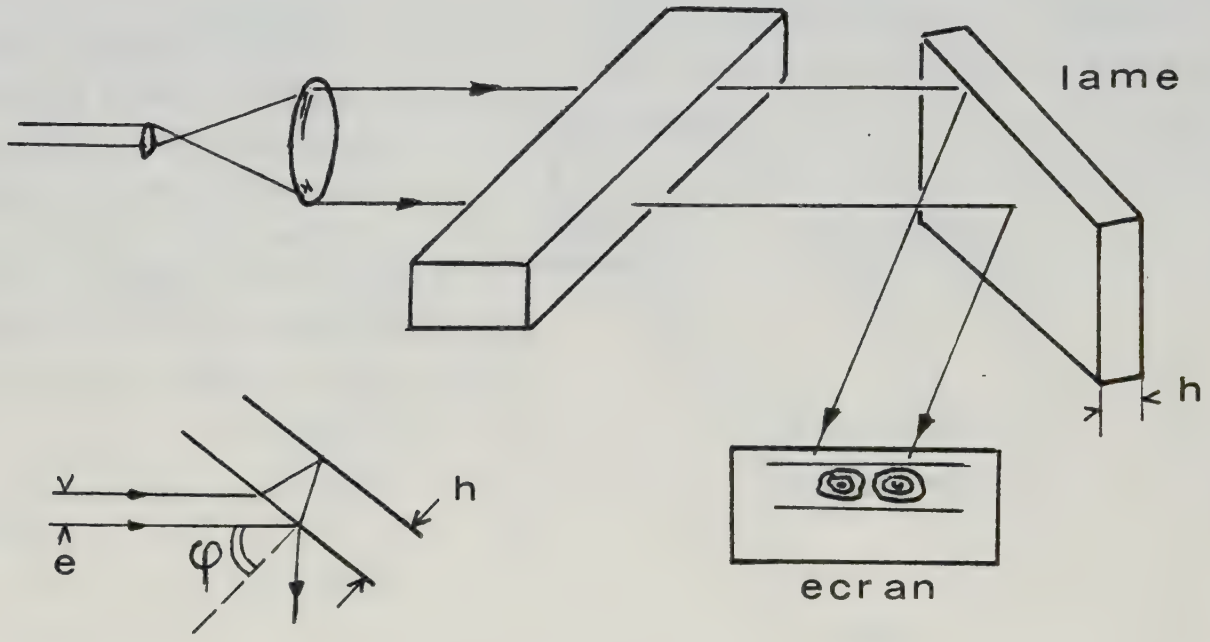


Figure 6

La distance e, peut être choisie, en changeant l'angle d'incidence sur la lame, d'après la relation $e = \frac{2h \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2\varphi}}$, où φ est l'angle d'incidence et h l'épaisseur de la lame. Nous avons utilisé une lame de h = 2 mm, avec une planéité et un parallélisme de l'ordre de grandeur de λ (6328 Å), et n = 1,5. L'avantage de ce système est de ne pas être sensible aux vibrations, et de permettre de faire des mesures et des visualisations de façon simple et rapide.

Cette méthode étant très sensible aux variations de gradient de température, elle permet de suivre les propriétés spatiales de la structure convective.

A partir des photos des franges d'interférence (Fig.7), on peut indexer les valeurs de l'ordre d'interférence i correspondant à des valeurs discrètes de $\frac{\partial T}{\partial x_i}$, et obtenir le profil (ou variation spatiale) de $\frac{\partial T}{\partial x_i} = f(x)$.

On peut comparer sur la figure 8 le profil de la composante verticale de la vitesse, mesurée avec l'anémométrie, et le gradient horizontal de température sur le même rouleau. Par ailleurs, des mesures sur la structure globale peuvent être faites avec cette méthode : c'est la méthode employée pour la mesure de la dynamique d'amortissement des perturbations, dans une structure convective inhomogène pour $R < R_c$. (Fig.9).

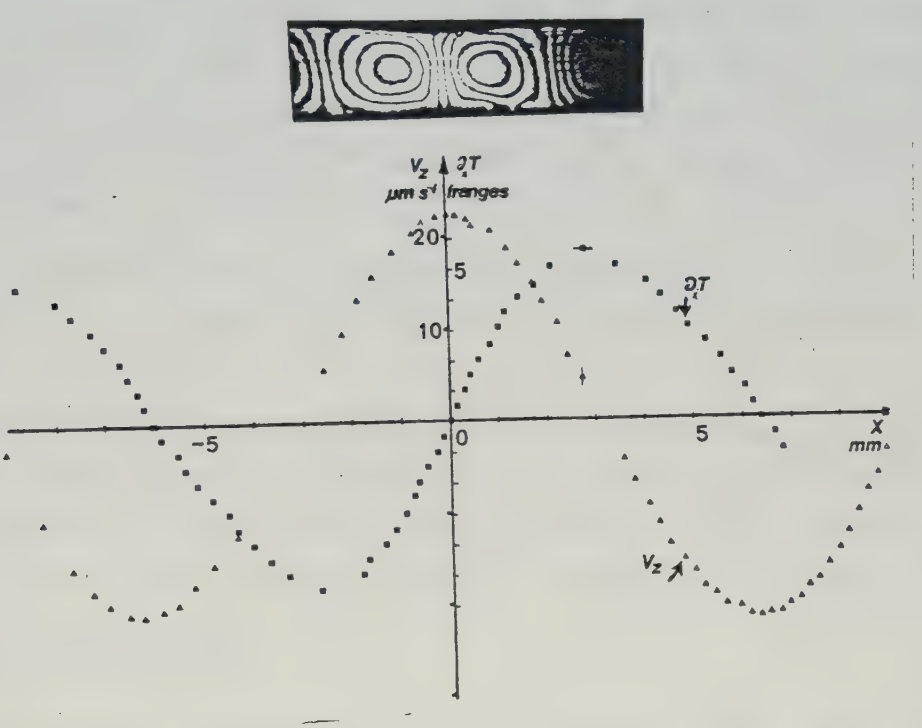


Figure 7

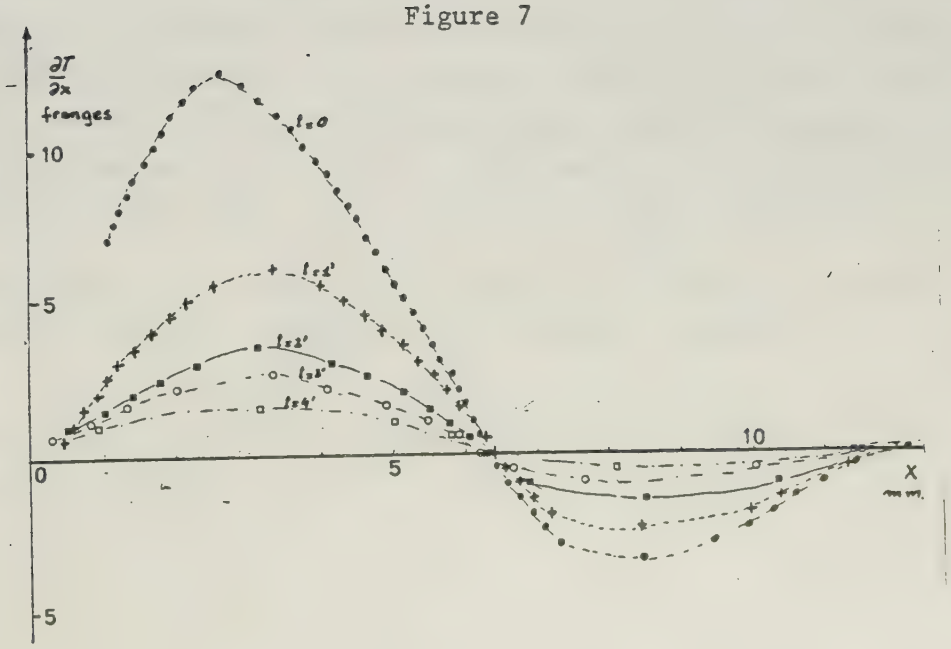


Figure 8

5.6 *Visualisation par ombroscopie*

Au voisinage du seuil de convection où les non-linéarités sont faibles, les lignes d'isogradients horizontaux de température ressemblent aux lignes de courant des rouleaux bidimensionnels ; on obtient ainsi une belle façon de visualiser l'écoulement.

D'autres méthodes optiques ont été utilisées dans le but de faire une visualisation globale, comme l'ombroscopie ou méthode de focalisation, qui correspond à une méthode de déflection [29].

La déflection d'un faisceau élargi vers les régions de plus haut indice de réfraction (plus froides), correspond à un effet de lentille thermique : les courants descendants (froids) focalisent la lumière. Une image de focalisation donne ainsi une façon simple de connaître la périodicité du mouvement convectif.

La position du foyer de ces lentilles thermiques est fonction du gradient de température ; la distance "focale" étant d'autant plus grande que les gradients sont faibles.

Signalons aussi l'utilisation de traceurs, généralement de paillettes d'aluminium, pour connaître la circulation du fluide à partir de la réflexion de la lumière [34]. Dans ce cas, ce sont les gradients de vitesse qui orientent les paillettes, en produisant des zônes brillantes par réflexion.

5.7. *Mesure des vitesses*

Les mesures de vitesses par méthodes "mécaniques" sont imprécises et incomplètes. Dans ce domaine aussi, les méthodes optiques ont donné la meilleure solution, grâce à des techniques d'anémométrie Laser-Doppler [35]. C'est ainsi que des résultats théoriques connus depuis longtemps dans ce domaine classique de la convection, ont dû attendre l'apparition des sources cohérentes de lumière (Laser) pour être testés de façon expérimentale.

On peut donner une illustration simple de la méthode d'anémométrie que nous avons utilisée, qui est celle des "faisceaux croisés" :

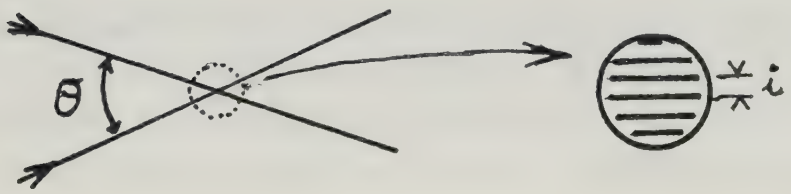
i) Le fluide en mouvement est dopé avec des petites particules de latex, qui, ayant une densité semblable à celle du liquide, suivent son mouvement. (Fig. 10i)

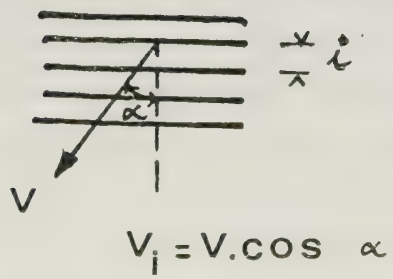
ii) Un système de franges d'interférence est formé, par l'intersection -dans le liquide- de deux faisceaux en provenance du même laser ; ce volume commum aux deux faisceaux est le "point" de mesure. L'interfrange dépend de l'angle θ entre les deux faisceaux, selon la relation $i = \frac{\lambda}{2\sin\theta/2}$, où λ est la longueur d'onde de la lumière (Fig. 10ii).

iii) Les particules se déplaçant à une vitesse V dans le système de franges diffusent de la lumière dont l'intensité est modulée dans le temps avec une fréquence $f = V_i/i$. Un photodétecteur recevant la lumière diffusée dans le point de mesure, permet de détecter la modulation de l'intensité diffusée (bouffée Doppler). (Fig. 10iii)

Des analyseurs de fréquence ou des fréquencemètres spéciaux permettent de mesurer l'intervalle de temps $\tau = f^{-1}$ de passage de la particule entre deux franges consécutives, et on peut obtenir la valeur de la composante de vitesse V_i, normale aux franges :

$$V_i = if = \frac{\lambda f}{2\sin\theta/2} \qquad (1)$$





$$V_i = V.\cos\alpha$$

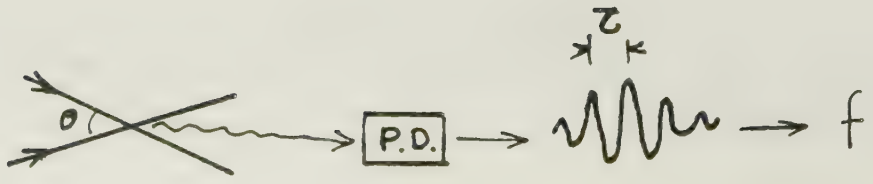


Figure 10

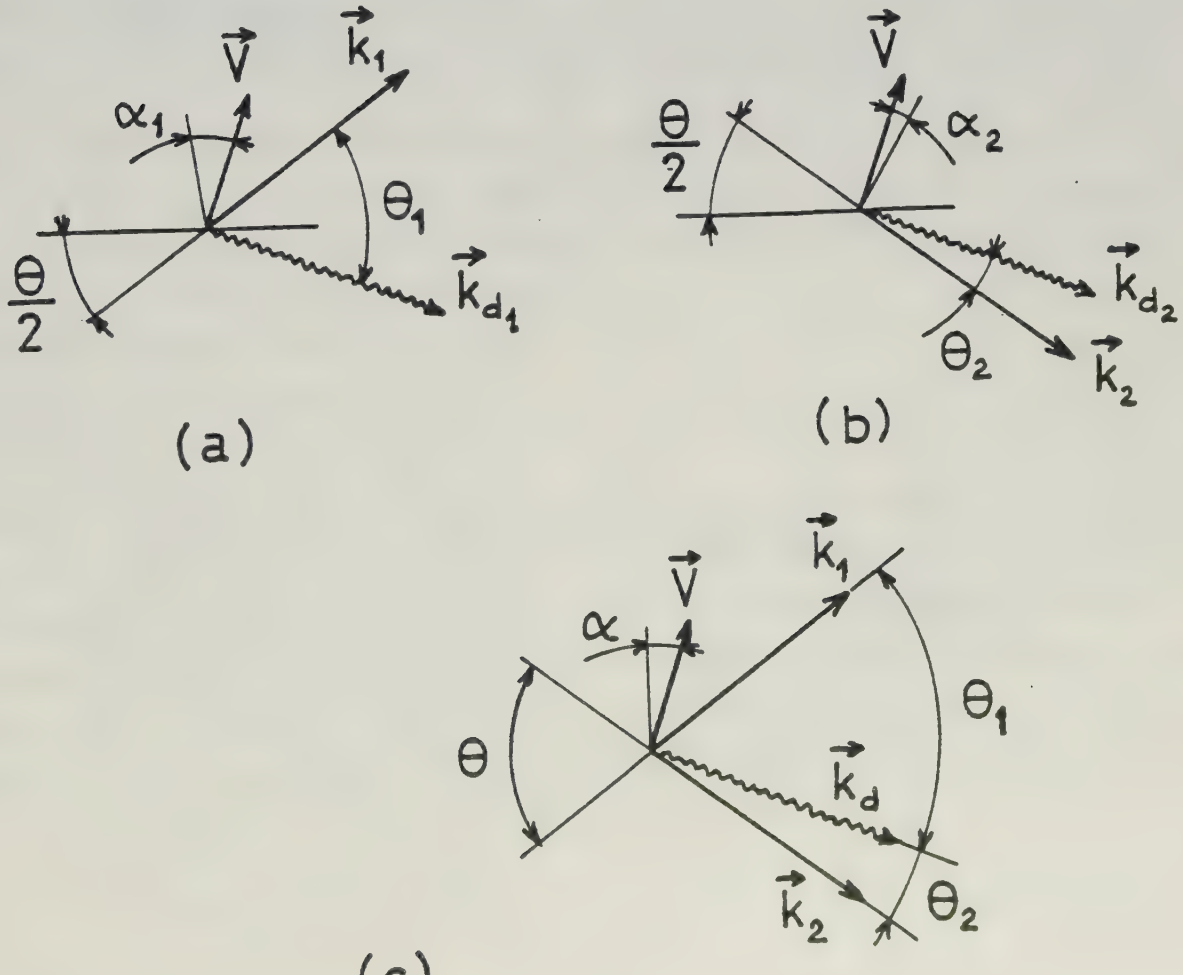
Une autre façon de décrire le fonctionnement de l'anémomètre à faisceaux croisés, est basée sur le décalage de la fréquence ν_o de la lumière diffusée par des corps en mouvement (effet Doppler). En effet, la valeur de ce décalage est :

$$\Delta\nu = \frac{2\nu_o V}{c} \cdot \cos\alpha \cdot \sin\frac{\theta}{2}$$

où c = vitesse de la lumière ; V = vitesse du corps, θ = angle entre la direction du faisceau incident ($\vec{k}_i$) et du faisceau diffusé ($\vec{k}_d$), α = angle entre la direction de la vitesse du corps et la bissectrice extérieure de l'angle θ . Si nous analysons séparément la contribution au décalage Doppler de chacun de deux faisceaux, on peut voir, en utilisant cette formule,que sur le photodétecteur placé en PD (Fig.11), la lumière diffusée a des fréquences :

$$\nu_i = \nu_o + \Delta\nu_i = \nu_o\left(1 + \frac{2V}{c}\cos\alpha_i \sin\frac{\theta_i}{2}\right) \quad (i = 1,2)$$

Avec $\theta = \theta_1 - \theta_2$ et $\alpha_i = \alpha + (\beta - \theta_i/2)$.



Avec les deux faisceaux,on aura sur le photodétecteur un champ électromagnétique qui est la superposition (cohérente) des deux $\vec{k}_{d_i}$. Comme le photodétecteur est un détecteur quadratique dont la réponse est proportionnelle à l'intensité, le battement des deux faisceaux sur sa partie sensible fait apparaître un signal correspondant à la différence de fréquences $\nu_1 - \nu_2 = f_d$.

Et $$f_d = \nu_1 - \nu_2 = \frac{2V\nu_o}{c}\left[\cos[\alpha + \beta - \frac{\theta_1}{2}]\ \sin\frac{\theta_1}{2} - \cos[\alpha + \beta - \frac{\theta_2}{2}]\ \sin\frac{\theta_2}{2}\right],$$

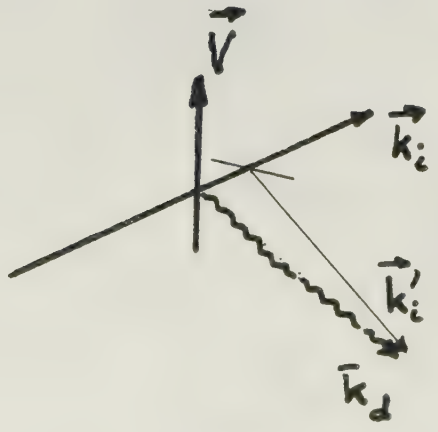
en développant l'expression trigonométrique, et avec la relation $\theta = \theta_1 - \theta_2$, et $\beta = \theta_2 + \frac{\theta}{2}$, il vient :

$$f_d = \frac{2V\nu_o}{c} \cdot \cos\alpha \cdot \sin\frac{\theta}{2}$$

qui est la même que celle obtenue en (1). [36]

On note que $f_d = \Delta\nu$ (décalage Doppler) est indépendant de l'angle de position du photodétecteur. La position du photodétecteur aura seulement une influence sur l'intensité du signal et donc sur le rapport signal/bruit.

Il existe d'autres arrangements pour mesurer la vitesse, comme celui donné dans la figure 12 qui est une méthode hétérodyne, car le battement dans le photodétecteur est fait entre la lumière diffusée (de fréquence $\nu_o + \Delta\nu_1$) et le faisceau de référence (fréquence ν_o). Si on veut raisonner par analogie avec les franges,on peut considérer celles formées entre le faisceau de référence $\vec{k}_i$, et le faisceau diffusé $\vec{k}_d$, de façon que les différentes positions angulaires du photodétecteur correspondraient à des valeurs différentes de l'interfrange $i = \frac{\lambda}{2\sin\theta/2}$. Notons que la bonne définition du point de mesure, dans la méthode des deux faisceaux croisés fait que cette dernière est bien adaptée à des mesures de vitesse dans la convection de Rayleigh-Bénard.



5.8. *Dispositif expérimental pour l'anémomètre* :

On utilise un laser Hélium-Néon, de faible puissance (~ 5 mW) à λ = 6328 Å. Une lame semitransparente à la sortie du laser permet de faire un dédoublement du faisceau. Avec des miroirs et des lentilles, on fait intersecter les deux faisceaux en les focalisant, de façon à avoir un volume réduit de mesure (Fig. 13).

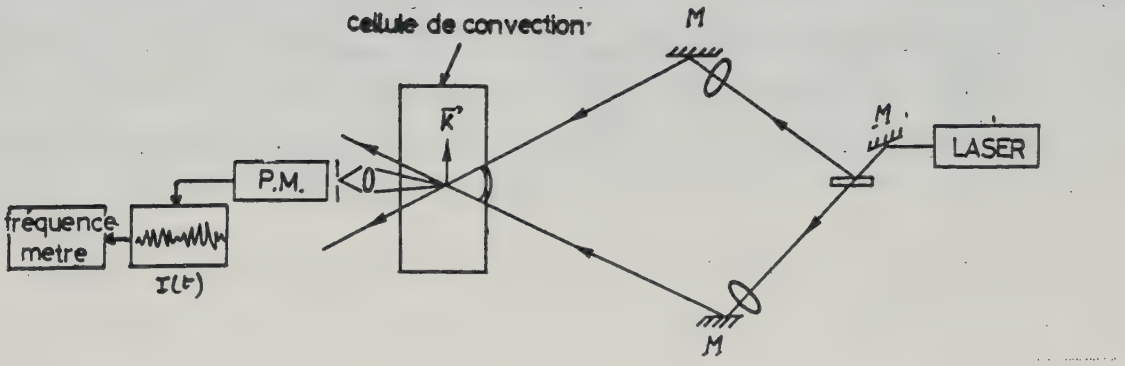


Figure 13

La mesure de la composante horizontale (v_x) ou verticale (v_z) de la vitesse est faite en plaçant le plan des deux faisceaux horizontalement ou verticalement. Dans la plupart de nos mesures, nous avons été amenés à mesurer de très faibles valeurs de la vitesse, pour des nombres de Rayleigh voisins du point d'instabilité. Ceci impose un angle θ d'intersection important pour avoir un rapport le plus élevé possible entre vitesse et fréquence à cause de la difficulté de mesurer les faibles fréquences ($v = Cf$ où

$C = \frac{1}{i} = \frac{2\sin\theta/2}{\lambda}$). Mais des limitations géométriques dues à la boite de convection (petite hauteur pour avoir des seuils thermiques élevés pour l'apparition de la convection, ce qui facilite la précision de la mesure de température) empêchent d'avoir des angles importants pour la mesure de la composante verticale de la vitesse v_z (Fig.14).

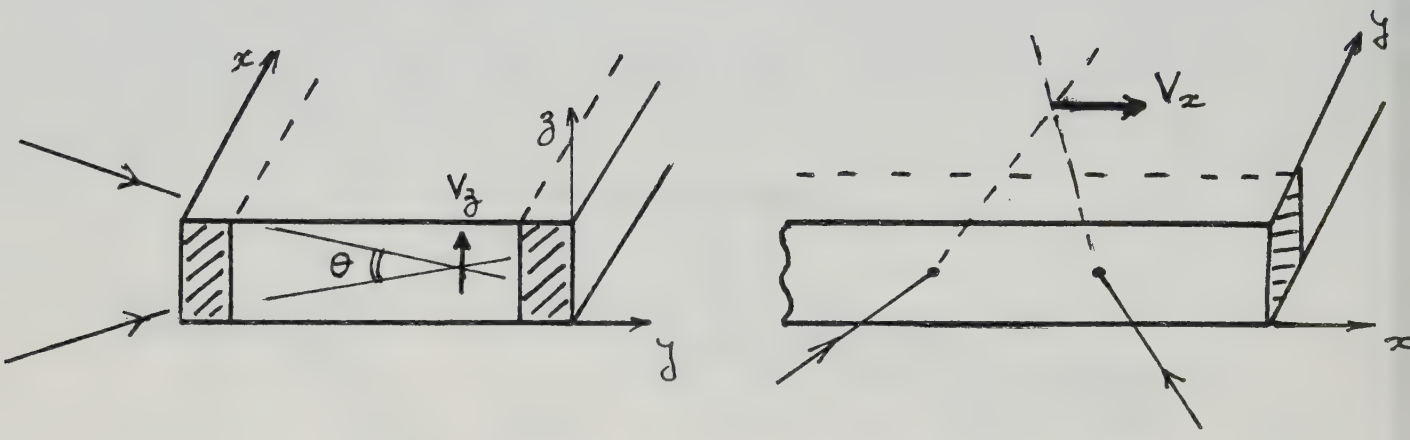


Figure 14

Cette difficulté est moindre si on mesure la composante horizontale v_x de la vitesse, mais des angles trop importants empêchent la mesure des vitesses au voisinage immédiat des parois latérales de la boite de convection. Dans les expériences où nous avons mesuré la composante verticale de la vitesse v_z (voir publication VI), l'angle θ dans le fluide a été de $\theta \simeq 12°$ ($i = 3$ µm), et dans le cas de mesure de composantes horizonales v_x (voir publications I et II) l'angle θ dans le fluide a été de $\theta = 23°$ ($i = 1.6$ µm).

Notons par ailleurs que de faibles angles d'intersection conduisent à des volumes de mesure importants, allongés dans la direction y. (la dimension longitudinale du volume de mesure est $y_o = \frac{e}{\sin\theta/2}$, où e est la taille du faisceau). Ceci conduit à des erreurs de localisation, qui entrainent des incertitudes dans la mesure de vitesse quand il existe des gradients de vitesse importants dans cette direction y.

Les billes de latex utilisées pour obtenir la diffusion de la lumière ont un diamètre de l'ordre de grandeur de l'interfrange $\phi \simeq 2$ µm. La possibilité de détecter la diffusion vers l'avant, qui est la plus intense, permet de ne pas avoir besoin de forte concentration de diffuseurs.

La détection se fait par un photomultiplicateur, après collection de la lumière par un objectif photographique et focalisation de l'image du volume diffusant sur un petit diaphragme placé devant le photomultiplicateur. La diffusion par les deux faisceaux donne,par l'intermédiaire de l'objectif photographique,une image en forme de croix. Il est alors aisé de placer le petit diaphragme sur l'image du croisement des deux faisceaux.

Un aspect très important est celui de l'analyse du signal Doppler, centré autour de la fréquence nulle. La méthode la plus précise est celle de l'analyse de Fourier en temps réel, (F.F.T) qui permet d'obtenir le spectre de Fourier du signal Doppler. Le signal est très complexe à cause du caractère aléatoire de la présence de particules diffusantes dans le volume de mesure, et des phases différentes qui caractérisent la présence simultanée de plusieurs particules dans ce volume.

L'intérêt de la mesure des vitesses par analyse de Fourier est l'accès visuel à tout le spectre Doppler, ce qui permet en particulier de connaître la largeur du pic (donc la répartition des vitesses). L'utilisation de l'analyseur de Fourier en temps réel est limitée au cas stationnaire et il a été utilisé dans les expériences décrites dans les publications I, II et V.

D'autres méthodes de mesure de la fréquence Doppler ont aussi été utilisées. Ce sont des variantes de type fréquencemètre avec critères de validation du signal dont on veut déterminer la fréquence. Ils sont essentiellement de deux types : compteurs et suiveurs de fréquence.

Les premiers travaillent sur le principe de la mesure du temps entre chaque oscillation dans une "bouffée Doppler", qui est, dans le cas d'un

signal parfait, l'inverse de la fréquence f_d. Des irrégularités dans ces signaux et l'existence de temps morts entre signaux obligent à utiliser des critères de validation du type n/N. N est un nombre proche de la quantité de franges dans le point de croisement ($N < \frac{e}{\lambda_o} \text{tg} \frac{\theta}{2}$), ce qui donne le nombre maximal d'oscillations dans la bouffée Doppler. Le critère de validation sera le suivant : on ne validera les périodes mesurées que si un nombre $n < N$ d'entre elles sont égales à une erreur ε près (n et ε sont ajustables indépendamment). Chaque fois que cette condition est remplie, la valeur $f_d = \tau_{opt}^{-1}$ est donnée, et gardée en mémoire jusqu'à la prochaine validation.

Ce type de compteur a été utilisé dans l'expérience décrite dans la publication VI.

L'autre méthode "instantanée" de mesure de la fréquence Doppler est celle du suiveur de fréquence. Il travaille en engendrant continuellement un signal périodique de fréquence variable que l'on compare avec celui correspondant au décalage Doppler présent sur le photomultiplicateur ; quand les deux fréquences f_d et f oscillateur sont égales, il y a accrochage et la valeur de la fréquence correspondante est gardée en mémoire jusqu'au prochain accrochage. Le suiveur a été aussi utilisé dans l'expérience de la publication VI. Ces deux types de fréquencemètres sont adaptés à des mesures de vitesse instationnaires ou automatiques. Ils ont été utilisés pour l'expérience de diffusion de la phase (publication VI) où des mesures automatiques de vitesse en fonction du temps et la position étaient nécessaires.

En effet, un enregistrement des variations de la phase des rouleaux pendant une période de perturbation cyclique ($\omega^{-1} \leq 100'$) de la structure a été fait avec 9 points par rouleau et dans plus de 15 rouleaux, conduisant à des temps de mesure ininterrompus allant jusqu'à 18 jours. (Fig.15)

5.9. *Caractéristiques physiques du fluide en convection*

Dans la plupart de nos expériences, le liquide utilisé a été de l'huile aux silicones (SI 200) qui a l'avantage d'être transparente pour pouvoir faire des mesures optiques, d'exister dans une gamme très large de viscosités et de conserver des propriétés physiques presque constantes (fluide Boussinesq) pour les températures auxquelles elle est soumise.

Les valeurs de ces constantes physiques sont les suivantes :

Huile Rhodorsil 47 V 50 [43]

α : Coefficient de dilatation en volume : $1,05 .10^{-3}\ °C^{-1}$

λ : Conductivité thermique : $3,8 .10^{-4}$ cal. au $°C^{-1} s^{-1}$

Cp : Chaleur spécifique : 0,35 cal. gr^{-1}.

ρ : densité en 25°C : 0,959 gr/cm^3

$\kappa = \lambda/\rho Cp$: diffusivité thermique : $1,13\ 10^{-3}\ cm^2/s^{-1}$

ν : viscosité cinématique : 0.56 $cm^2 s^{-1}$ à 25°C.

n : indice de réfraction : 1.43

P : nombre de Prandtl : 492

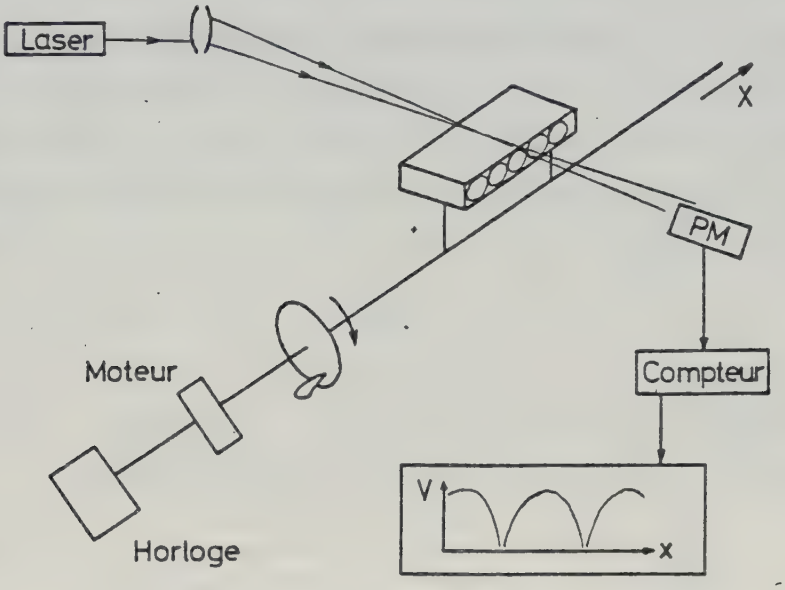


Figure 15

5.10. *Boite de convection*

Nous avons travaillé avec des boites rectangulaires (Lx > Ly) de géométrie telle qu'elle favorise l'induction de rouleaux bidimensionnels perpendiculaires au grand côté Lx. La plupart des expériences ont été faites dans un cadre rectangulaire, en plexiglass, de dimensions intérieures :

$$Lx = 18 \text{ cm} \; ; \; Ly = 3 \text{ cm} \quad \text{et} \quad Lz = d = 0.6 \text{ cm}.$$

Le facteur de forme (ou rapport d'aspect) selon x est $\Gamma_x = 30$ et selon y : $\Gamma_y = 5$. Ces dimensions vérifient un critère de bidimensionalité [37] $\Gamma_y^2 < \Gamma_x$, dont on peut trouver une justification au chapitre VI.

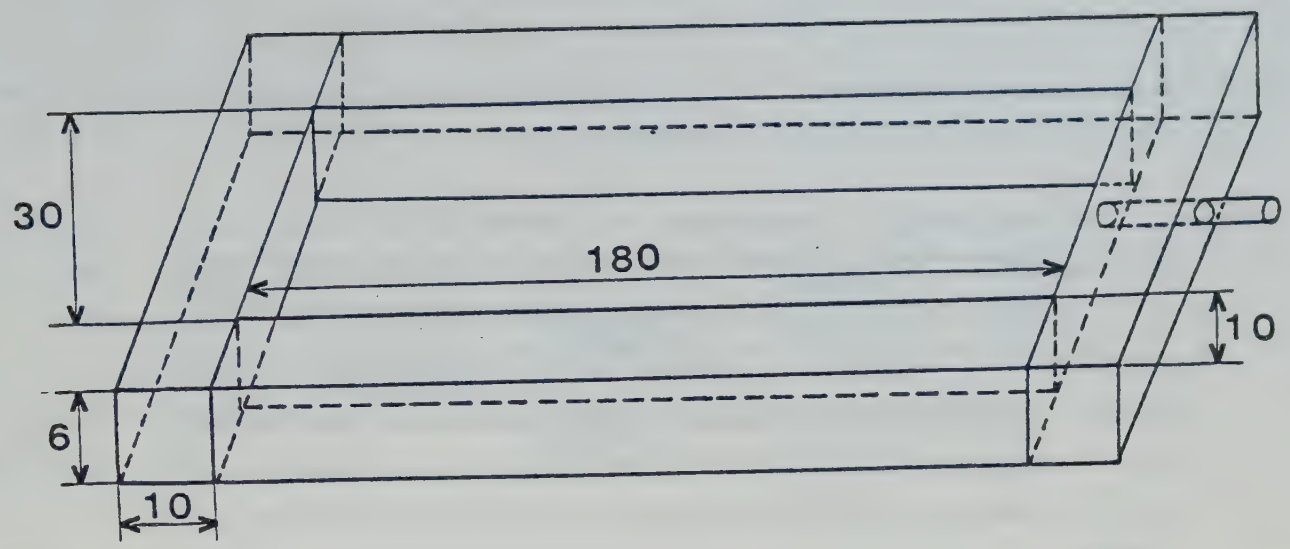
Avec d = 0.6 cm et l'huile de 0.5 Stokes on a une différence de température critique $T_c = 4{,}51°C$ (voir Fig. 1, publication I), suffisamment importante pour avoir une bonne précision dans la mesure de la différence de température qui permet d'accéder à des valeurs très petites de $\varepsilon = \frac{R - R_c}{R_c} \simeq \frac{\Delta T - \Delta T_c}{\Delta T_c}$. Par ailleurs cette valeur de ΔT_c s'est révélée suffisamment faible pour éviter les effets de type "non Boussinesq".

(La déviation non Boussinesq peut être mesurée par le calcul du nombre de Rayleigh dans les plaques supérieures et inférieures, avec les constantes physiques qui correspondent à ces situations limites :

$$R_{T^+} = \frac{\alpha g \Delta T_c d^3}{\nu(T^+).\kappa(T^+)} \quad , \quad R_{T^-} = \frac{\alpha g \Delta T_c d^3}{\nu(T^-).\kappa(T^-)} \quad ; \quad \frac{R_{T^+}}{R_{T^-}} = 0.89 \;) \; .$$

Le cadre de plexiglass (Fig. 16) est disposé entre deux plaques massives de cuivre électrolytique, de 1,2 cm d'épaisseur. Sur les faces extérieures sont soudés des tubes de cuivre permettant la thermostatisation par circulation d'eau. Des thermocouples (chromel-alumel, 41 µV/°C), connectés en montage différentiel, permettent de connaitre la différence de température entre des points situés au milieu de ces plaques, à 0.6 cm de la surface en contact avec le fluide. (Fig. 17)

La différence de température ΔT appliquée à la couche est régulée à l'aide de circulations d'eau provenant de 2 bains thermostatiques. La précision standard est de ± 0.01 °C. Toutefois dans le cas des expériences menées au voisinage immédiat du seuil ΔT_c, une régulation complémentaire a été obtenue en ajustant la puissance de chauffe d'un élément chauffant



Cadre de plexiglass

Figure 16

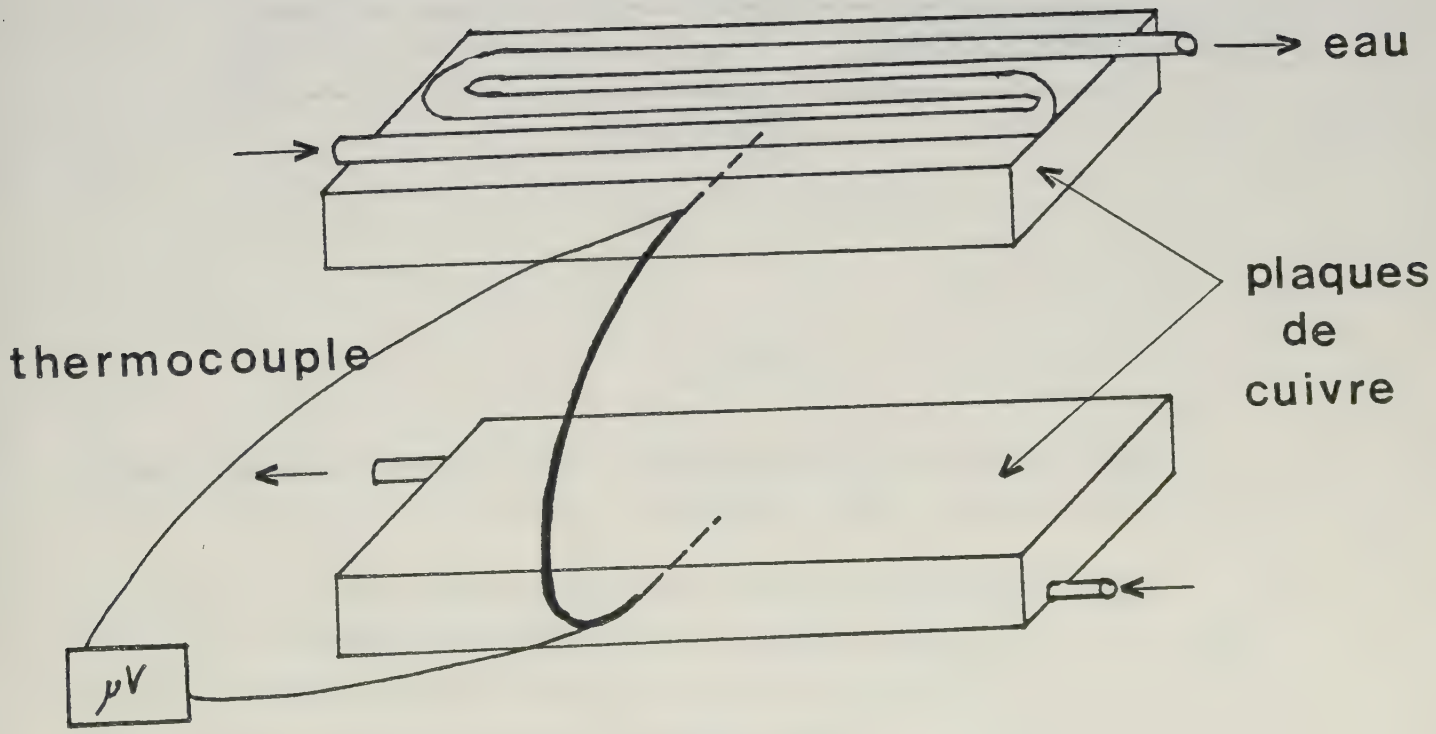


Figure 17

supplémentaire placé sur la circulation d'eau de l'un des 2 bains. La précision sur ΔT devient alors $\pm$ 0.002 °C.

La réalisation d'expériences de convection induite ($R < R_c$) - voir publication II. et celles correspondant à la diffusion de phase - publication VI - a exigé des modifications importantes du montage de base. Pour les expériences de convection induite, la plaque de cuivre inférieure est composée de deux parties dont les températures sont différentes. Au dessus de la plaque de cuivre inférieure est collée (avec un bon contact thermique) une deuxième plaque qui comporte une partie qui peut être portée à une température supérieure grâce à un chauffage électrique. Le tout est usiné avec la meilleure planéité possible.

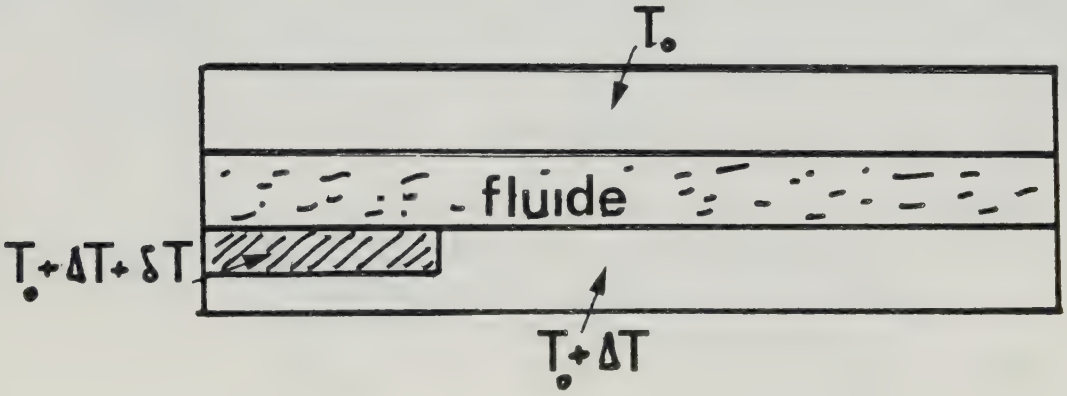


Figure 18

Ainsi la couche de fluide peut être soumise, dans une région limitée, à $\Delta T > \Delta T_c$ alors que tout le reste de la couche est à $\Delta T < \Delta T_c$.

Pour l'expérience de diffusion de la phase, deux plaques supplémentaires sont ajoutées aux plaques normales. Les plaques supplémentaires placées au dessus et au dessous de la couche de fluide comportent chacune un réservoir et une fente fine (de largeur : 0.3 mm.) parallèle à l'axe y, et sur toute la largeur Ly de la boite. Cette disposition (Fig. 19) permet de faire traverser la couche de fluide par un très faible écoulement vertical, nécessaire à la perturbation contrôlée de l'écoulement.

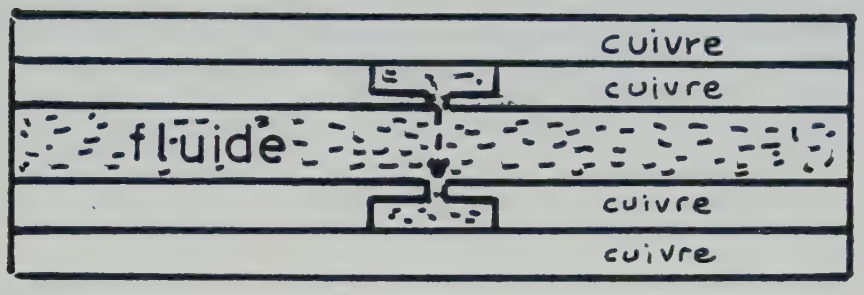


Figure 19

CHAPITRE 6

COMPORTEMENT CRITIQUE DANS LA CONVECTION DE RAYLEIGH-BENARD ($R > R_c$)

Dans la publication I on décrit les expériences ayant permis pour la première fois, la mise en évidence des paramètres τ et ξ et leur comportement. De plus cette publication contient le calcul des grandeurs dans le cas réel des parois horizontales rigides.

6.1. Dynamique (amortissement critique) :

La dynamique de l'amplitude de la vitesse (et de la perturbation de température) au voisinage du seuil R_c est bien décrite par l'équation de type Landau que l'on a vue dans les chapitres précédents.

Une perturbation initiale croît linéairement, avec un taux de croissance σ (cf. Ch. III) proportionnel à l'écart au seuil ; à mesure que le temps croît, une saturation non-linéaire se produit. Une troisième étape peut se produire éventuellement : celle d'accomodation de la structure, à laquelle on peut associer un temps de phase.[38]

Dans les expériences décrites dans la publication I on voit les deux premières étapes. Pour cela on impose une augmentation brusque (échelon) de la différence de température entre les plaques, alors que la structure convective est déjà établie à une valeur de nombre de Rayleigh relatif $\varepsilon_{initial}$. La variation de la vitesse est mesurée avec l'anémomètre laser. Le point de mesure correspond à un maximum ($v_{i\ max.} = \tilde{V}$: amplitude) et il est placé au milieu de la boite (selon x et y). Dans la figure 2 de cette publication on voit le processus d'équilibre. La mesure du temps caractéristique est faite à partir de l'ajustement des points expérimentaux à la fonction solution de l'équation de Landau ; en utilisant une série de mesures faites à ε_{final} différents, on a pu vérifier la loi d'amortissement critique $\tau = \tau_o\ \varepsilon^{-1}$ (Fig.3). On vérifie ainsi l'exposant de cette loi (−1) qui se déduit directement de l'équation de Landau (ou tout aussi bien de l'analyse linéaire du chap. III) ; de même la grandeur de τ_o a pu être déterminée.

La condition d'échelon de température n'est pas exactement réalisée à cause de la conductivité thermique finie du fluide : les mesures ne sont valables que si le temps d'évolution de l'amplitude de vitesse $\tau = \tau_o\varepsilon^{-1}$ est plus grand que le temps d'établissement du nouveau gradient de température qui est de l'ordre du temps de diffusion thermique entre les deux plaques $\tau_{th} \sim d^2/\kappa$. Ceci n'est le cas que pour les expériences faites avec

des valeurs de $\varepsilon < \tau.\kappa/d^2$ (~ 0.05). Notons que dans le cas contraire, il est possible, en principe, de considérer l'évolution de ε avec le temps, et de comparer les valeurs expérimentales avec les solutions du problème :

$$\frac{\tau_o \partial \tilde{V}}{\partial t} = \varepsilon(t)\, \tilde{V}(t) - \frac{\tilde{V}^3(t)}{V_o^2} \quad , \text{ pour } \quad \varepsilon(t) = \frac{\Delta T(t)}{\Delta T_c} - 1.$$

6.2. *Longueur d'influence*

L'autre paramètre significatif mis en évidence dans ces expériences est la longueur ξ_o, qui a été mesurée comme étant la longueur d'influence des parois latérales sur la structure convective. Cette longueur joue le même rôle que la longueur de corrélation dans d'autres phénomènes physiques et a un comportement critique du type $\xi = \xi_o\, \varepsilon^{-\nu}$.

Le moyen le plus naturel de mettre en évidence ξ dans une boite de convection est basé sur l'inévitable existence de la condition de raccordement $\tilde{V} = 0$ aux deux parois latérales en $x = 0$ et $x = L_x$. L'influence des parois se fait donc ressentir sur les valeurs maximales des composantes de vitesses, qui décrivent ainsi une enveloppe $\tilde{V}(x)$.

Le premier fait qualitatif est la mise en évidence d'une importante influence des parois s'étendant sur plusieurs rouleaux pour des très faibles ε , alors que cette influence est presque inobservable pour $\varepsilon \sim 1$. L'ajustement des valeurs expérimentales avec une loi $\sim$ th x/ξ^+ (solution de l'équation de l'amplitude) a permis d'obtenir les valeurs de ξ et de vérifier son comportement critique en $\varepsilon^{-0.5}$; de plus on a déterminé la valeur de $\xi_o^+ = \sqrt{2}\xi_o = 0.54$ d. Pour chaque ε, et après une longue période de stabilisation (1 jour au minimum ; la série des mesures étant réalisée en diminuant la différence de température), le profil de la composante v_x de la vitesse a été relevé sur la moitié de la cellule (soit sur une distance correspondant à $\sim$ 15 rouleaux). En utilisant un programme d'affinement statistique dû à Tournarie [39] , on obtient la valeur de $\xi(\varepsilon)$. Chaque série a comporté environ 20 valeurs de ε différentes, et l'adaptation de la solution tg x/ξ^+ aux données expérimentales a été vérifiée avec un coefficient de qualité $Q(Q_{max.} = 1)$ qui a été de l'ordre de 0.9 pour la plupart des mesures.

6.3. *Solution exacte pour l'enveloppe $\tilde{V}(x)$* :

La solution exacte de l'équation de Landau

$$\tau_o \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} = \varepsilon \tilde{V} - \frac{\tilde{V}^3}{V_o^2} + \xi_o^2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2} \qquad (1)$$

pour le cas stationnaire ($\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} = 0$) est du type : $\tilde{V} = A\ sn\ (Qx + C, k)$, où sn est la fonction sinus elliptique, une fonction jacobienne elliptique de module k ($0 \leq k^2 \leq 1$). A, Q et C sont des constantes. Si on remplace la solution dans l'équation on obtient :

$$Q = \frac{1}{\xi_o} \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+k^2}} \qquad (2) \qquad \text{et} \qquad A = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{1+k^2}}\ \tilde{V}_o k \ . \qquad (3)$$

La condition aux bords $\tilde{V}(0) = 0$ est remplie avec $C = 0$, et celle $\tilde{V}(L) = 0$ correspond à :

$$QL = 2m\ K\ (k^2) \qquad (4)$$

où $m = 1, 2, \ldots$, et K est l'intégrale elliptique complète de première classe* [40], à cause des propriétés de périodicité de la fonction sn. La solution sans noeuds intérieurs de l'enveloppe (telle que le vérifie l'expérience) correspond à $m = 1$.

Donc, la solution pour l'enveloppe de la composante de vitesse est :

$$\tilde{V}(x) = V_o\ k \sqrt{\frac{2\varepsilon}{1+k^2}}\ \ sn\ (x/\xi) \qquad (5)$$

où $$\xi = \xi_o \sqrt{\frac{1+k^2}{\varepsilon}} \qquad (6)$$

et la valeur du module k est obtenue à partir de (2) et (4) :

$$\varepsilon = \frac{4\xi_o^2 (1+k^2)\ K^2(k^2)}{L^2} \qquad (7)$$

Pour chaque ε on obtient k comme solution de l'équation intégrale (7). Dans la limite $k \to 0$, la fonction sn $\to$ sinus, et dans la limite $k^2 \to 1$, la

---

* $$K(k^2) = \int_o^1 \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-k^2\alpha^2}} \ ; \ K(0) = \pi/2 \ ; \ K(k^2) \geq K(0) \ ; K(1) \to \infty.$$

fonction sn → tangente hyperbolique. La transition du régime en sinus vers celle de type tangente hyperbolique est très rapide, car le parametre k augmente vite de 0 à 1 (Fig.1) .

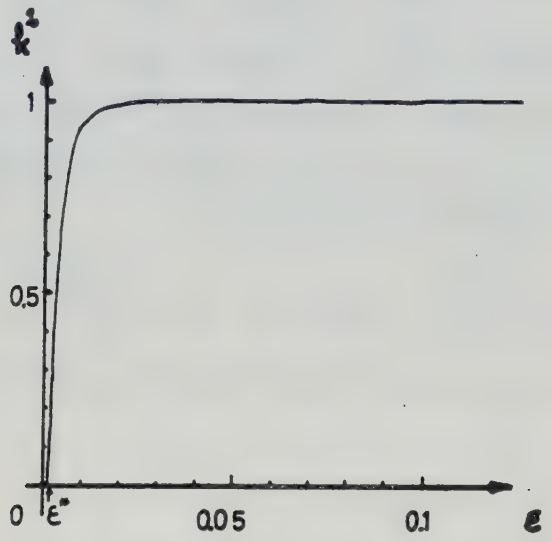


Figure 1

Remarques :

i) Pour $k \to 1$, la solution est

$$\tilde{V} = V_o \sqrt{\varepsilon}\ \mathrm{tg}\ (x/\xi^+) \text{ , avec } \xi^+ = \sqrt{2}\ \xi_o\ \varepsilon^{-1/2} \text{ ,}$$

telle que nous l'avons utilisée précédemment.

ii) D'après (4), il existe un minimum pour εL^2, car K a un minimum, pour $k = 0$, et en conséquence il n'y a pas de convection ($\tilde{V}(k=0) = 0$). La valeur de ε minimum, pour L donné, est donc

$$\varepsilon^* = \xi_o^2 \pi^2 / L^2 \qquad (8)$$

(De façon réciproque on peut définir une longueur minimum ou critique, pour ε donné, $L_c = \xi_o \pi / \varepsilon^{1/2}$).

iii) Au voisinage du seuil, avec $\varepsilon \to \varepsilon^*$ (et en conséquence $k \to 0$) la fréquence spatiale Q est $Q^+ = 2K(0)/L = \pi/L$. En développant $K(k) \simeq \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{k^2}{4} + \ldots\right]$, et d'après (7), on obtient $k \simeq \sqrt{\frac{2}{3}}\ \sqrt{\frac{L^2 \varepsilon}{\pi^2 \xi_o^2} - 1}$

qui remplacé dans l'expression pour l'amplitude A et comme sn → sinus, nous permet de trouver la valeur asymptotique de l'enveloppe :

$$\tilde{V}(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} V_o \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon^*} - 1} \quad \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \qquad (9)$$

Cette relation peut s'écrire en fonction de la distance critique L_c, comme il est fait dans la publication I.

6.4. *Seuil de convection et effets de taille*

D'après le point ii) de la remarque précédente, on trouve une loi de variation du nombre de Rayleigh en fonction de la taille de la boite, car $\varepsilon_{minimum}$: $\varepsilon^* = R^* - R_c^\infty / R_c^\infty$ où $R_c^\infty = 1708$ est le nombre de Rayleigh critique pour les boites infinies, et nous trouvons finalement R^* = seuil de convection dans le cas de la boite finie :

$$R^*(L/d) = R_c^\infty \left[1 + \pi^2 \xi_o^2 / L^2\right] = 1708 \left[1 + 1.46/L/d)^2\right] \qquad (10)$$

Les expériences sur la variation du nombre de Rayleigh critique en fonction de l'allongement de la boite [42] sont en accord avec cette loi (Fig.2) déduite ici par un calcul très simple.

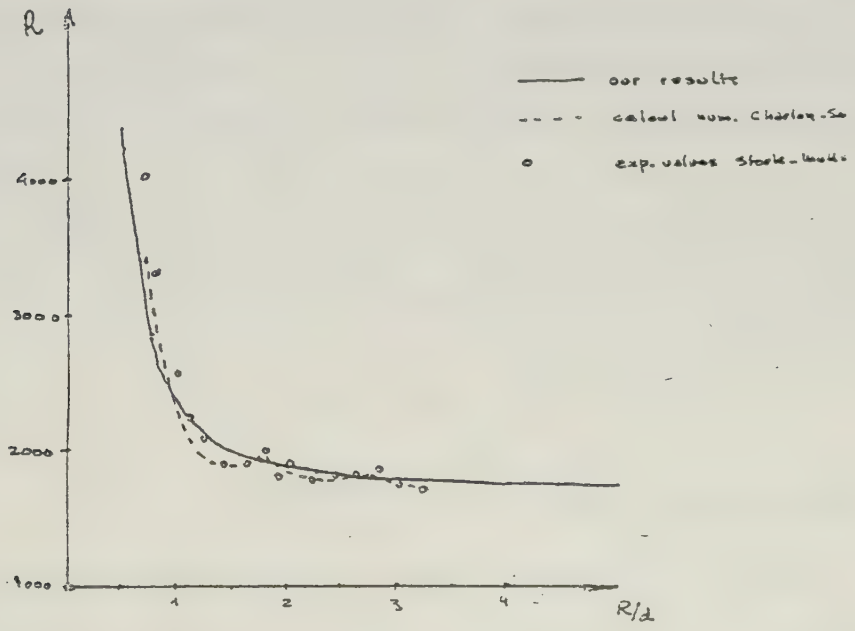


Figure 2

Remarque : Si L ~ d, l'approximation de la loi d'amplitude n'est pas valable (cf. ch. 4.4.), car on ne peut pas découpler les échelles pour l'enveloppe et la longueur d'onde.

D'après la relation (6) : $\xi^+ = \xi_o \sqrt{\frac{1+k^2}{\varepsilon}}$, la valeur maximum de ξ est limitée pat la taille de la boite : $\xi_{max} = \xi(\varepsilon^*) = \xi_o \varepsilon^{*-1/2} = L/\pi$.

Ceci nous amène à comprendre cette notion de déplacement du "point critique" dû au fait de la taille finie de la boite de la façon suivante : la présence stabilisante des parois s'étend sur des distances de l'ordre de ξ , empêchant la convection. Si la longueur ξ est de l'ordre de L/2, donc chaque paroi exerce son influence sur la moitié de la boite, et il n'y a pas convection tant que la valeur de ε^* est telle que

$$\xi(\varepsilon^*) \geq L/2 \Rightarrow \varepsilon^* = f(L) \Rightarrow R^* = R_c^\infty [1 + cte/(L/d)^2] ,$$

qui est la loi de la variation du nombre de Rayleigh critique en fonction de (L/d).

L'application de ce modèle unidimensionnel est limitée à l'existence de structures en rouleaux bidimensionnels, sans composantes de vitesse dans la direction y de leur axe. Dans le cas où il existe des structures déjà orientées (de vecteur d'onde $\vec{K}$ dans la direction X), les variations d'amplitude selon Y sont d'ordre supérieurs et la longueur de corrélation ou d'influence selon y est $\xi_y \sim \xi_{yo}\, \varepsilon^{-1/4}$, comme on l'a vu dans le chapitre IV. Si on applique les mêmes concepts que précédemment on peut expliquer un critère de bidimensionnalité : $\Gamma_y^2 < \Gamma_x$ [35][21] où $\Gamma_y = Ly/d$ et $\Gamma_x = Lx/d$. Dans la boite rectangulaire on aura des rouleaux (bidimensionnels) si $\xi_x < Lx$ (1) (seuil de convection dépassé) et il n'y aura pas de contribution transversale en y si $\xi_y > Ly$ (2) (influence stabilisante des parois transversales). Comme $\xi_x = \xi_o \varepsilon^{-1/2}$ et $\xi_y = (\frac{\xi_o}{2q_o})^{1/2} \varepsilon^{-1/4}$, la région commune en ε qui satisfait les deux conditions (1) et (2) est

$$Ly^2/\xi_o^2 < \varepsilon^{-1/2} < Lx/\xi_o \quad \text{d'où} \quad \Gamma_y^2 < \Gamma_x .$$

6.5. *Conditions aux bords*

La condition aux limites pour la fonction amplitude utilisée est celle d'annulation de l'amplitude à la paroi ($\tilde{V} = 0$ en x = 0 et L) qui satisfait les conditions aux bords par exemple pour la composante horizontale de vitesse $v_x = 0$ et $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$ en x = 0 et L (cette dernière provient de $v_z = 0$

sur la paroi latérale). Il n'est pas possible de faire des mesures de v_x sur la paroi (cf. Ch. IV) pour vérifier de façon directe cette condition. Toutefois le bon accord des points expérimentaux avec la solution type tangente hyperbolique ($tg\ (x - x_o)/\xi^+$ dans laquelle l'ordonnée x_o trouvée est pratiquement celle de l'ordonnée de la paroi) confirme que la condition des parois est bien remplie.

Nos expériences excluent la possibilité, évoquée en [44], de l'existance d'une valeur finie de l'amplitude à la paroi (qui serait due à un problème de conduction horizontale de la chaleur à travers ces parois). Dans ce cas, cette valeur finie de l'amplitude se manifesterait par une valeur de x_o différente de l'ordonnée réelle de la paroi. ($x_o - x_{paroi}$ = longueur de Biot ou longueur d'extrapolation).

PUBLICATION I

Classification
Physics Abstracts
47.25Q

CRITICAL EFFECTS IN RAYLEIGH-BÉNARD CONVECTION

J. WESFREID (*), Y. POMEAU (**), M. DUBOIS (*), C. NORMAND (**) and P. BERGÉ (*)

DPhT/DPh-G/PSRM, CEN Saclay, BP nº 2, 91190 Gif sur Yvette, France

(*Reçu le 23 décembre 1977, accepté le 16 mars 1978*)

Résumé. — On montre que les propriétés du phénomène convectif de Rayleigh-Bénard au voisinage de son seuil critique d'instabilité sont étroitement liées à celles d'une transition de phase du second ordre. Dans le cadre des hypothèses de Landau-Hopf une théorie est développée dont l'ensemble des conséquences est vérifié par les résultats expérimentaux.

Abstract. — The properties of the convection Rayleigh-Bénard phenomenon near its critical threshold of instability are shown to be closely related to those of a second order phase transition. A theory is developed in the framework of the Landau-Hopf hypothesis, and all its predictions are verified by experimental results.

1. **Introduction.** — In the Rayleigh Bénard instability [1], it has been shown experimentally [2] that the local convection velocity increases, near the onset of convection, according to the power law :

$$V = V_0 \, \varepsilon^{1/2}$$

with $\varepsilon = \dfrac{R - R_c}{R_c}$, R being the Rayleigh number and R_c its critical value ; in the case of a horizontal layer with rigid boundaries $R_c = 1\,707$. At $R = R_c$ the symmetry of the non convecting fluid with respect to infinitesimal translations and rotations is spontaneously broken and an ordered convective state is established in the form of a remarkable spatial periodicity of the velocity [2] and of the perturbation of the temperature [3, 4] ; this corresponds in the case of a rectangular cell to the well known system of parallel convecting rolls. Such behaviour presents an analogy with a second order phase transition, where the order parameter should be the velocity. The exponent 1/2 in the behaviour of the velocity ([1]) should be identified with the critical exponent, usually called β, its value being, in the present case, in good agreement with the phenomenological mean field approach of the Landau-Hopf model.

Similarly the Landau-Hopf approach tells us that the growth (or the decay) rate of the velocity amplitude becomes very slow as ε becomes very small. This obviously corresponds to the well known critical slowing down in phase transitions. This critical behaviour in Rayleigh-Bénard convection has been studied theoretically in [6], [7] and [8]. Experimentally pointed out first in [2] and [9] this critical slowing down has been studied in detail by acoustic observations [10] and by heat flux measurements [11]. We present here the results obtained by direct measurements of the order parameter itself, that is to say of the velocity amplitude. We extend the Landau-Hopf model to the concept of influence length, which diverges as ε goes to zero, and compare the theoretical predictions with the experimental values obtained from the local velocity measurements.

2. **Theory.** — 2.1 LANDAU-HOPF PICTURE OF THE CRITICAL SLOWING DOWN AND OF THE INFLUENCE LENGTH. — Both the critical behaviour of the influence length and the critical slowing down may be understood in the frame of the Landau-Hopf theory. There is also an obvious connection between this problem and the well known Eckhaus theory of stability for parallel rolls near the onset of convection [12].

The basic remark is that, in slightly supercritical conditions, the linear growth rate depends in a *generic* fashion on ε and on the horizontal wavenumber. When the horizontal wavenumber is just equal to its value for the marginally stable state at R_c (or at $\varepsilon = 0$), the expression for τ^{-1} (linear growth rate of the fluctuation) near $\varepsilon = 0$ is

$$\tau^{-1} = \tau_0^{-1} \, \varepsilon \, . \qquad (1)$$

(*) Service de Physique du Solide et de Résonance Magnétique.
(**) Service de Physique Théorique.

([1]) The exponent slightly different from 0.5 reported in [5], though highly reproducible, was due to the poor thermal conductibility of the horizontal boundaries.

But one knows from the theory of the linear stability, that in supercritical conditions, perturbations with a wavenumber lying in a whole interval of values around $k = k_c$ are linearly unstable, the width of this interval collapsing to zero at $\varepsilon = 0$. Thus a natural extension of (1) to account for the existence of this interval is

$$\tau^{-1} = \tau_0^{-1}[\varepsilon - \xi_0^2(k - k_c)^2] \qquad (2)$$

where the quantity ξ_0, which has the dimension of a length is computed below and does not depend on the Prandtl number P.

To study the space-dependent phenomena due to a local perturbation in a system of parallel rolls, it is convenient to consider the perturbed roll system as having a well defined wavenumber k_c, and a slowly modulated amplitude (or *envelope*). Of course this approximation implies that many rolls exist in the convective state, so that the horizontal extent of the container must be much larger than the wavelength of the rolls (in practice it has to be much larger than the height of the convection layer). We are close enough to the onset of instability to ensure that only one eigenmode is unstable for one value of the Rayleigh number although the determination of the wavelength becomes a difficult question [1] if R is so large that many modes are unstable for a finite box, and can be considered as a continuum. The existence of a band of unstable wavenumbers (in the limit of an infinite horizontal layer) is needed here in order to fit the horizontal boundary condition for a finite horizontal layer. Then V depends on x as

$$V = \tilde{V}(x) \sin (k_c x + \varphi) .$$

with

$$\left| \frac{1}{\tilde{V}} \frac{d\tilde{V}}{dx} \right| \ll k_c .$$

In this (realistic) picture, the term $(k - k_c)^2$ in (2) yields a second derivation of $\tilde{V}$ with respect to x, and the linear part of the Landau-Hopf equation becomes

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} = \tau_0^{-1} \left(\varepsilon \tilde{V} + \xi_0^2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2} \right) .$$

Cubic terms must be added to account for the small non linearities existing near $\varepsilon = 0$, and one gets

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} = \tau_0^{-1} \left(\varepsilon \tilde{V} + \xi_0^2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2} - \frac{\tilde{V}^3}{V_0^2} \right) . \qquad (3)$$

where V_0 can be computed from the fluid equations by an ε-expansion near the onset of convection [1].

In order to look at spatial modulation of the system of parallel rolls, one has to solve (3) under stationary conditions. This gives

$$\xi_0^2 \frac{d^2 \tilde{V}}{dx^2} = - \varepsilon \tilde{V} + \frac{\tilde{V}^3}{V_0^2} . \qquad (4)$$

One readily recognizes the equation of motion of a particle located at time « x » at the point « $\tilde{V}$ » and moving in the potential

$$U(\tilde{V}) = \frac{\varepsilon \tilde{V}^2}{2} - \frac{1}{4} \frac{\tilde{V}^4}{V_0^2} .$$

Let us consider first the effect of a single lateral boundary ; in this case, the conditions for the equation of the *motion* are $\tilde{V} = 0$ at $x = 0$ (no motion at the boundary) and $\tilde{V} = \tilde{V}_0^1$ at $x = +\infty$ [$\tilde{V}_0^1 = \varepsilon^{1/2} V_0$]. The solution is

$$\tilde{V} = \tilde{V}_0^1 \operatorname{tgh} \left(\frac{x}{\xi} \right) ,$$

where $\xi = \xi_0 (2/\varepsilon)^{1/2}$ is the characteristic influence length that becomes infinite or *critical* at $\varepsilon = 0$. The $\varepsilon^{-1/2}$ dependence of ξ is typical of this Landau-Hopf approach.

In a more realistic situation one should consider the effect of *two* lateral walls, that is the solutions of (4) under the conditions $\tilde{V} = 0$ at $x = 0$ and $x = L$, L being the distance between the lateral walls which are parallel to the axis of the rolls. In the image of the motion of a particle in a potential, L is the *time* interval between two crossings at $\tilde{V} = 0$. This problem may have more than one solution (in particular $\tilde{V} = 0$ is always a solution). However a single solution is stable with respect to the dynamics described by (3) ; this is the convective solution (when it exists) without *oscillations* (or nodes) : $\tilde{V} = 0$ at $x = 0$ and $x = L$ only. We shall not give the general form of this solution, which may be found for instance in the work presented in [13]. Let us only mention that, for a given ε, such a solution exists if L is larger than some value ; this is actually due to the fact that the period of the oscillations in the potential $U(\tilde{V})$ has an upper bound $2 \pi \xi_0 \varepsilon^{-1/2}$.

If L is less than $L_c = \pi \xi_0 \varepsilon^{-1/2}$, no convecting state exists. If L is slightly larger than L_c, the envelope of the rolls is given by a sine function

$$\tilde{V} = \frac{2 V_0 \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{3} L_c} (\sqrt{L^2 - L_c^2}) \sin \left(\frac{\pi x}{L} \right) .$$

Accordingly the well-known $\varepsilon^{1/2}$ dependence of the amplitude of the rolls is reached in the range $L \gg L_c$ only (or, L being given, for $\varepsilon \gg \xi_0^2 \pi^2 / L^2 \simeq 0.001\,6$ in our experimental conditions).

If, on the contrary, a perturbation $\tilde{V}$ of non zero amplitude is imposed at the boundary of a slightly

subcritical region ($\varepsilon < 0$), this yields a system of rolls decaying exponentially in space (at least, if their amplitude is small enough to make the cubic term in (4) negligible), according to the law

$$\tilde{V}(x) = \tilde{V}(x = 0)\, e^{-x/\xi'}$$

where $\xi' = \xi_0(-\varepsilon)^{-1/2}$ ($\varepsilon < 0$) is to be compared with the penetration length in the supercritical condition : $\xi = \xi_0(2/\varepsilon)^{1/2}$ ($\varepsilon > 0$).

In critical condition ($\varepsilon = 0$), the boundary condition for the penetrating convection yields a system of parallel rolls whose amplitude decays according to the law

$$\tilde{V}(x) = V_0 \frac{\xi_0 \sqrt{2}}{x + x_0}$$

x_0 being determined by the boundary condition.

As we want to apply the preceding consideration to a real situation, we have to know explicitly the quantities called V_0, τ_0^{-1} and ξ_0. The computation of V_θ, which defines the amplitude of the convection has been clearly done in detail [1, 14] and the theory is in good agreement with the experimental findings [2].

The quantities τ_0^{-1} and ξ_0 have already been computed in [6-8]. These calculations however have been done in the (unrealistic) case of free-free boundary conditions. (See however ref. [11 and our comment at the end of the subsection 2.2.) So we shall give a few details about the case of rigid-rigid boundaries which corresponds to our experiments.

2.2 Determination of the coefficient τ_0. — Let us start with the linearized, time dependent equation in V_z, the vertical component of the velocity [15]

$$\left(P^{-1}\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\Delta V_z = R(\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2)\, V_z \,. \tag{5}$$

The relation between the temperature perturbation θ and V_z is given by :

$$\left(P^{-1}\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\Delta V_z = \theta$$

where we have used the scaling factors d, κ/d, d^2/κ, $\Delta T/R$ for length velocity, time and temperature respectively, κ being the thermal diffusivity

In the free-free case, solutions of the form :

$$V_z = e^{\sigma t} \cos kx \sin \pi z \,,$$

where $\sigma = \tau^{-1}$ satisfy the boundary conditions :

$$V_z = 0\,, \quad \frac{\partial V_x}{\partial z} = 0 \quad \text{and} \quad \theta = 0 \quad \text{at} \quad z = \pm\frac{1}{2}\,.$$

Therefore σ is given by the solution of a second order equation :

$$\sigma^2 A - \sigma(1 + P) A^2 + P(A^3 + Rk^2) = 0$$

with

$$A = -(\pi^2 + k^2)$$

$$\sigma_\pm = (1 + P)\frac{A}{2} \pm (1 + P)\frac{A}{2} \times \sqrt{1 - \frac{4P}{(1 + P)^2}\left(1 - \frac{R}{R_0(k)}\right)} \tag{6}$$

where

$$R_0(k) = \frac{(\pi^2 + k^2)^3}{k^2}\,.$$

$R = R_0(k)$ being the equation of the curve of marginal stability corresponding to $\sigma = 0$. Near the critical point : $R_0(k) \sim R_c$, and the square root in (6) expands in powers of $\varepsilon \left(\equiv \dfrac{R - R_c}{R_c}\right)$ giving at the lowest order

$$\sigma_- = (\pi^2 + k_c^2)\frac{P}{1 + P}\varepsilon \,;$$

we don't worry about σ_+ which is always negative. In the rigid-rigid case, solutions of (5) are of the form :

$$V_z = e^{\sigma t} \cos kx \left(\sum_{i=1}^{3} A_i \operatorname{ch} \mu_i' z\right)$$

where the coefficients μ_i' are given by the solution of :

$$\sigma^2 B_i' - \sigma(1 + P) B_i'^2 + P(B_i'^3 + Rk^2) = 0 \tag{7}$$

with

$$B_i' = \mu_i'^2 - k^2 \,.$$

According to the results obtained in the free-free case we expect σ to depend on ε so that the term in σ^2 can be neglected. Then we introduce $\delta\mu_i$ and δB_i, the deviation of μ_i' and B_i' to μ_i and B_i

$$\mu_i' = \mu_i + \delta\mu_i \qquad B_i' = B_i + \delta B_i$$

with :

$$B_i = \mu_i^2 - k^2$$

and

$$B_i^3 + Rk^2 = 0 \,.$$

Inserting these expressions in (7) and writing R in the form :

$$R = R_c + \Delta R \,,$$

we obtain the expressions for δB_i and consequently for $\delta\mu_i$ as functions of σ and ε

$$\delta B_i = \sigma\frac{(1 + P)}{3P} + \frac{B_i}{3}\varepsilon$$

$$\delta\mu_i = \frac{\delta B_i}{2\mu_i}\,.$$

The coefficients A_i are determined by the boundary conditions

$$V_z = V_x = \theta = 0 \quad \text{at} \quad z = \pm \frac{1}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{3} A_i \operatorname{ch} \mu_i'/2 = 0 \tag{8a}$$

$$\sum_{i=1}^{3} A_i \mu_i' \operatorname{sh} \mu_i'/2 = 0 \tag{8b}$$

$$\sum_{i=1}^{3} A_i(P^{-1} \sigma - B_i') B_i' \operatorname{ch} \mu_i'/2 = 0 . \tag{8c}$$

The above expressions are expanded to first order in $\delta\mu_i$. Then when we form the determinant of the algebraic system (8 − *a*, *b*, *c*) we recognize the equation of the curve of marginal stability and the determinant reduces to :

$$C_1 \sigma \frac{(1 + P)}{3 P} + C_2 \sigma \frac{(1 - 2 P)}{3 P} + C_3 \varepsilon = 0 .$$

The coefficients C_1, C_2 and C_3 which involve many complex numbers have been calculated on a computer, leading to the final expression :

$$\sigma = \frac{38.442\,9\, P}{1 + 1.954\,4\, P} \varepsilon .$$

Behringer and Ahlers [11] give without derivation a formula for σ (their τ_{RB} is just σ^{-1}) for the case of rigid boundaries. Up to minor arithmetical differences their result coincides with ours if one puts

$$\tau_D = \frac{d^2}{\kappa} \left(\frac{2}{\pi}\right)^2$$

in their formula (although this value of τ_D is not given explicitly).

2.3 Determination of the coefficient ξ_0^2 (curvature of the neutral curve near the critical point). — As previously shown, in the free-free case the equation of the curve of marginal stability is :

$$R = \frac{(\pi^2 + k^2)^3}{k^2} ,$$

which can be expanded near the critical point (R_c, k_c) by setting

$$R = R_c + \Delta R \quad \text{and} \quad k = k_c + \Delta k .$$

The lowest-order term in the expansion of the right hand side is just R_c, the term in Δk is null and finally to second order in Δk we get :

$$\Delta R = \frac{4 R_c}{3 k_c^2} (\Delta k)^2$$

leading to : $\xi_0^2 = 8 d^2/3 \pi^2$.

In the rigid-rigid case the equation of the neutral curve is given by setting equal to zero the determinant of the algebraic system in A_i's :

$$\sum_{i=1}^{3} A_i \operatorname{ch} \mu_i/2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{3} A_i \mu_i \operatorname{sh} \mu_i/2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{3} A_i(\mu_i^2 - k^2)^2 \operatorname{ch} \mu_i/2 = 0 .$$

We have used the following notations :

$$\mu_1 = \frac{i}{2} \sqrt{\rho - k^2} , \quad \mu_2 = S - iQ , \quad \mu_3 = S + iQ$$

with

$$\rho = (Rk^2)^{1/3}$$

which yields for the determinant

$$- \sqrt{\rho - k^2} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\rho - k^2}\right) = \frac{(S + Q\sqrt{3}) \operatorname{sh} S + (S\sqrt{3} - Q) \sin Q}{\operatorname{ch} S + \cos Q}$$

where the values of S and Q have been given elsewhere [16]. A perturbative calculation up to second order in k leads to :

$$\varepsilon = 0.148 (\Delta k)^2$$

which gives a universal value for ξ_0 (independant of the properties of the considered fluid)

$$\xi_0 = \sqrt{0.148}$$

leading to the dimensionalised, ε dependent value

$$\xi = 0.54\, d\varepsilon^{-1/2} .$$

3. **Experiments.** — 3.1 Experimental conditions. — The experimental study to be reported here has been performed with a layer of silicone oil, whose viscosity is 0.56 stokes at 22 °C (our working temperature) and thermal diffusivity κ is

$$1.13 \times 10^{-3} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$$

(Prandtl number $P \simeq 490$). The oil fills a rectangular plexiglass frame whose height is $d = 0.6$ cm ; the horizontal extension of the layer is 18×3 cm^2 ; the horizontal boundaries are made of massive copper plates and regulated in temperature within 10^{-2} °C. The critical temperature difference ΔT_c, applied to the layer and corresponding to R_c, is 4°51 ± 0.02. The local velocity components can be measured at any point of the layer by laser anemometry : in this paper we deal only with the horizontal component of the velocity V_x, measured at $z \simeq 0.3\, d$ where V_x is maximum *versus* z ($x'x$ is the horizontal axis, perpendicular to the axis of the rolls and parallel to the largest side

of the cell and $z'z$ is the vertical axis, d is the thickness of the layer).

As this study is related to critical phenomena, the measurements are made at values of ε lower than 1 and the convection structure is bidimensional and made of parallel rolls with a wavenumber

$$k \simeq k_c = 3.117\, d^{-1}\,.$$

3.2 CRITICAL SLOWING DOWN. — As already explained, the Landau-Hopf equation reads in an unsteady (and homogeneous) situation :

$$\frac{d\tilde{V}}{dt} = \frac{1}{\tau_0}\left(\varepsilon\tilde{V} - \frac{\tilde{V}^3}{V_0^2}\right) \qquad (9)$$

where $\tilde{V}$ is the velocity amplitude. If we consider the stationary solution $d\tilde{V}/dt = 0$, we obtain the previously reported relation $\tilde{V} = V_0\,\varepsilon^{1/2}$; an experimental illustration of this behaviour is shown on figure 1.

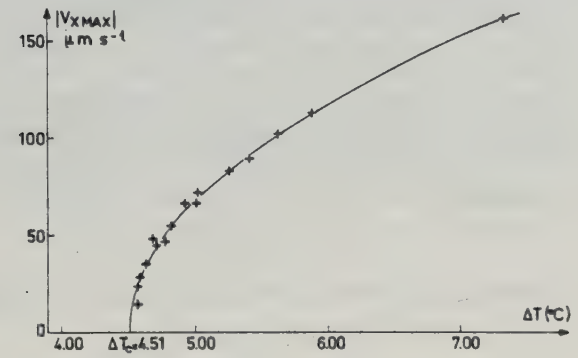


FIG. 1. — Dependence of the maximum velocity V_x max *versus* ΔT (ΔT is the temperature difference applied to the layer).

Integrating equation (9), we obtain the time approach of the amplitude of the velocity to its new equilibrium value when the temperature difference ΔT applied to the fluid layer is suddenly increased or decreased

$$\tilde{V}(t) = \tilde{V}_f \exp\left(\frac{t}{\tau}\right)\left[\exp\left(\frac{2t}{\tau}\right) + \left(\frac{\tilde{V}_f}{\tilde{V}_i}\right)^2 - 1\right]^{-1/2} \qquad (10)$$

$\tilde{V}_i$ and $\tilde{V}_f$ being respectively the initial and final amplitudes of the velocity.

In this calculation we have completely neglected the space dependence of the perturbation. Actually the dynamics of $\tilde{V}$ involves also a structure change, as $\tilde{V}_f$ and $\tilde{V}_i$ do not depend on x in the same manner. In the experimental situation, however, we were looking at the velocity in the middle of the cell near the maximum of the envelope, where this envelope is a very flat function of x, so that $\xi_0^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ is very small with respect to 1. and may be neglected. yielding the ordinary differential equation (9) instead of (3). Of course this approximation is no longer valid near the onset of convection. in the region where the envelope is close to a sine function.

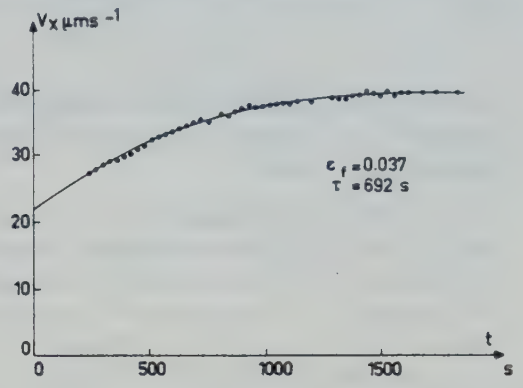


FIG. 2. — Time dependence of $(V_0^2)_x$ after a sudden change of ΔT at $t = 0$; the measurements corresponding to the first minutes have been dropped for they correspond to the temperature rearrangement of the layer. The full line represents the best fit with equation (10).

An example of the experimental time dependence is shown on figure 2. The velocity is measured at a fixed point in the layer (practically at a point where V is maximum *versus* x and z, near $x \simeq L/2$) as a function of time after a sudden increase of ΔT. We can see that the experimental behaviour is well described by the relation (10), which is represented by the full line and from which we deduce the experimental value of τ. Note furthermore that the values of τ obtained either by increasing or decreasing ΔT (and then V) are very consistent.

From the dependences measured at different values of ΔT, we can obtain the variation of τ with respect to ε, and as shown on figure 3 :

$$\tau = (20 \pm 4)\,\varepsilon^{-1.03\pm0.05}\ \text{s}\,.$$

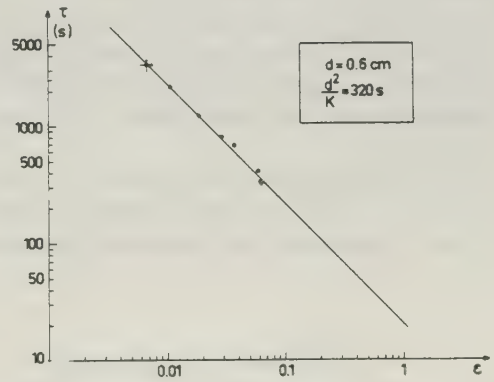


FIG. 3. — Dependence of the characteristic time τ *versus* ε.

The expected power law is very well defined experimentally and it is interesting to compare the value of the pre-exponential factor, τ_0, with the theoretical prediction

$$\tau_0 = \frac{d^2}{\kappa}\,\frac{1 + 1.954\,4\,P}{38.442\,9\,P}$$

where d^2/κ is the usual scaling factor ; for the used oil, $d^2/\kappa = 320$ s and P goes to infinity ; so the calculation gives

$$\tau_0 \simeq 16 \text{ s} .$$

We see that measured and calculated values are in reasonably good agreement within the limit of our experimental accuracy.

3.3 CRITICAL INFLUENCE LENGTH. — As explained above, if we look at the experimental dependences of the velocity $V = f(x)$, measured at a fixed value of z, the envelope of the usual sinusoidal variation should follow a law as $\tilde{V} \sim \text{tgh}\ (x/\xi)$, where ξ is critical at $\varepsilon = 0$ and depends on ε as $\xi = \xi_0(2/\varepsilon)^{1/2}$ x is the distance from the boundary. Typical experimental measurements are shown on figure 4. One can see —

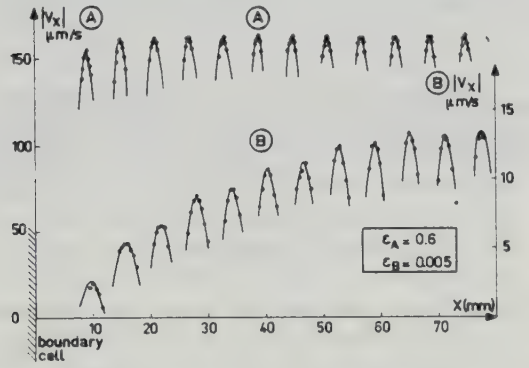


FIG. 4. — Spatial dependences of V_x (maximized *versus* z) with the distance x to the side wall for two different values of ε.

curve A — that for a value of $\varepsilon = 0.6$ the behaviour of the velocity is essentially represented along the whole cell by a law such as $V_x = (V_0^1)_x \sin kx$, as is well known. For very low values of ε, as shown in curve B, the influence domain due to the rigid boundary, which imposes the condition $V \equiv 0$ at $x = 0$, penetrates more and more deeply in the cell affecting many rolls.

This extra modulation effect is well fitted by a law such as $\tilde{V} = \tilde{V}_0^1 \text{ tgh}\ (x/\xi)$ as shown on figure 5 and in good agreement with theoretical predictions. From

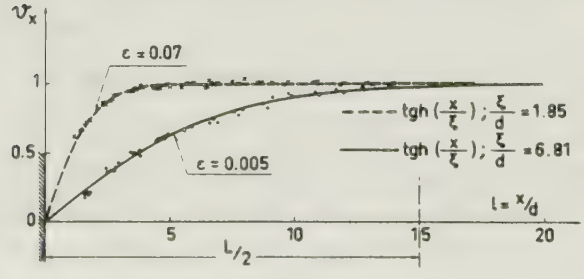


FIG. 5. — Ratio $\mathcal{V}_x = \dfrac{\text{measured } V_x}{V_0 \sqrt{\varepsilon} \sin (kx)}$ *versus* x/d ; the full line represents the best fit with a relation $\mathcal{V}_x = \text{tgh}\left(\dfrac{x}{\xi}\right)$.

many determinations of $V_x = f(x)$ obtained at different values of ε, we deduce the behaviour of ξ as a function of ε. The result is shown on figure 6 where the experimental relation is

$$\xi = (0.54 \pm 0.05)\, d\varepsilon^{-0.49 \pm 0.03}$$

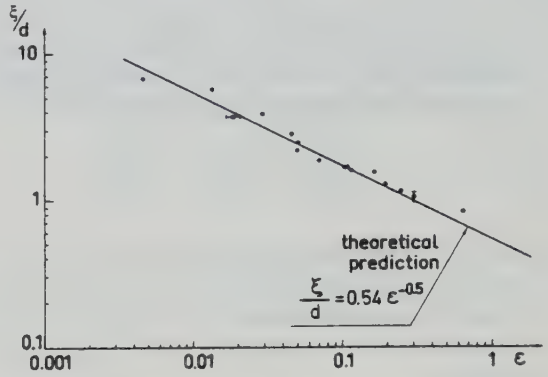


FIG. 6. — Dependence of the reduced influence length ξ/d *versus* ε ; the full line gives the theoretical prediction.

the agreement with the expected dependence is excellent, not only for the exponent $\nu = 0.5$ but also for the pre-exponential factor. Indeed, the calculated relation is

$$\xi = 0.54\, d\varepsilon^{-0.5}$$

which in the case of the studied layer $d = 0.6$ cm gives

$$\xi = 0.324\, \varepsilon^{-0.5} \text{ cm} .$$

4. **Conclusion.** — All the consequences of the Landau-Hopf picture applied to the Rayleigh-Bénard transition have been calculated and checked experimentally by direct measurement of the local velocity, i.e. of the order parameter. We have seen how the theoretical predictions are followed experimentally.

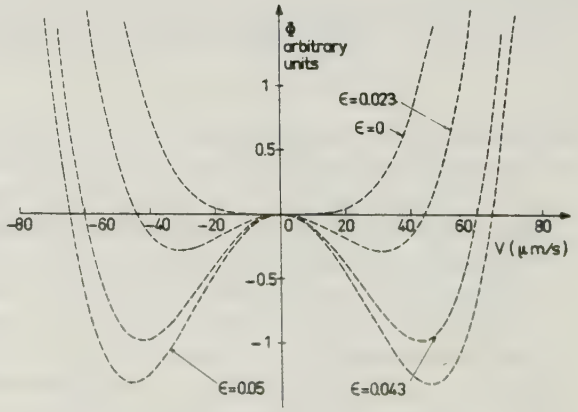


FIG. 7. — Dependence of the Landau potential density Φ *versus* velocity amplitude at infinite x, for different values of ε. To know the dependence as function of the adimensionalized velocity, the velocity coordinate in this figure must be multiplied by 0.053 1 (see conclusion), in fluids with $P \gg 1$.

In particular, the experimental exponents we found are classical : the exponent β which gives the relation of the velocity amplitude with ε is 0.5 ; the divergence of the influence length ξ is found with the exponent $\nu = 0.5$, and finally the critical slowing down presents characteristic time diverging at R_c with the exponent $y = 1$ ([2]).

All these measurements allow us to give the complete Landau functional under the form (see Fig. 7)

$$\varphi \div -\frac{1}{\tau_0}\int\left[\frac{\varepsilon V^2}{2} - \frac{1}{4}\frac{V^4}{V_0^2} + \frac{1}{2}\xi_0^2\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] dx$$

with

$$\xi_0^2 = 0.148\, d^2$$

$$\tau_0 = 0.063\,\frac{d^2}{\kappa}$$

$$V_0 = 10.5\,\frac{\kappa}{d}.$$

([2]) Similar behaviour restricted to the order parameter and critical slowing down had been found on the Taylor instability, see [17, 18], and on the Soret driven instability [19].

References

[1] NORMAND, C., POMEAU, Y., VELARDE, M. G., *Rev. Mod. Phys.* **49** (1977) 581.

[2] BERGÉ, P., *Fluctuations, Instabilities and Phase Transitions*, Nato Advanced Study Institutes (Plenum Press) Vol. **B 11** (1975) 323.

[3] FARHADIEH, R. and TANKIN, R. S., *J. Fluid Mech.* **66** (1974) 739.

[4] BÜHLER, K., KIRCHARTZ, K. R., OERTEL, H., submitted to *Acta Mech.* (1977).

[5] BERGÉ, P. and DUBOIS, M., *Phys. Rev. Lett.* **32** (1974) 1041.

[6] SEGEL, L. A., *J. Fluid Mech.* **38** (1969) 203.

[7] ZAITSEV, V. M. and SCHLIOMIS, M. I., *Sov. Phys. JETP* **32** (1971) 866.

[8] GRAHAM, R., *Fluctuations, Instabilities and Phase Transitions*, Nato Advanced Study Institutes (Plenum Press) Vol. **B 11** (1975) 215.

[9] AHLERS, G., *Fluctuations, Instabilities and Phase Transitions*, Nato Advanced Study Institutes (Plenum Press) Vol. **B 11** (1975) 181.

[10] SAWADA, Y., *Phys. Lett.* **65A** (1978) 5.

[11] BEHRINGER, R. P. and AHLERS, G., *Phys. Lett.* **62A** (1977) 329.

[12] ECKHAUS, W., *Studies in Non-linear Stability Theory* (Springer Verlag, New York) 1965.

[13] GUYON, E. and RUDNICK, I., *J. Physique* **29** (1968) 1081.

[14] SCHLÜTER, A., LORTZ, D. and BUSSE, F. H., *J. Fluid Mech.* **23** (1965) 129.

[15] MALKUS, W. V. and VERONIS, G., *J. Fluid Mech.* **4** (1958) 225.

[16] PELLEW, A. and SOUTHWELL, R. V., *Proc. R. Soc. London A.* **176** (1940) 312.

[17] DONNELLY, R. J., SCHWARTZ, K. W. and ROBERTS, P. H., Proc. R. *Soc. London A* **283** (1965) 531.

[18] GOLLUB, J. P. and FREILICH, M. H., *Fluctuations, Instabilities and Phase Transitions*, Nato Advanced Study Institutes (Plenum Press) Vol. **B 11** (1975) 195.

[19] GIGLIO, M. and VENDRAMINI, A., *Phys. Rev. Lett.* **39** (1977) 1014.

CHAPITRE 7

CONVECTION INDUITE

Dans la cas souscritique ($R < R_c$, $\varepsilon < 0$) les perturbations de vitesse sont amorties ($\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} < 0$). Il existe néanmoins la possibilité d'avoir un régime stable en rouleaux (ou cellules convectives), amorti spatialement, si certaines perturbations permanentes sont introduites dans le système. L'extension de cette région convective est mesurée par la longueur de pénétration $\xi^- = \xi_o |\varepsilon|^{-0.5}$.

7.1. *Convection induite*

Afin de mettre en évidence cette possibilité, une série de dispositifs expérimentaux a été utilisée pour provoquer une perturbation, et,à l'aide d'une condition convective de bord, influencer une région adjacente dont le nombre de Rayleigh est sous-critique ($R < R_c$). Les schémas des dispositifs utilisés sont les suivants (Fig.1) (cf. aussi Ch. 5.10)

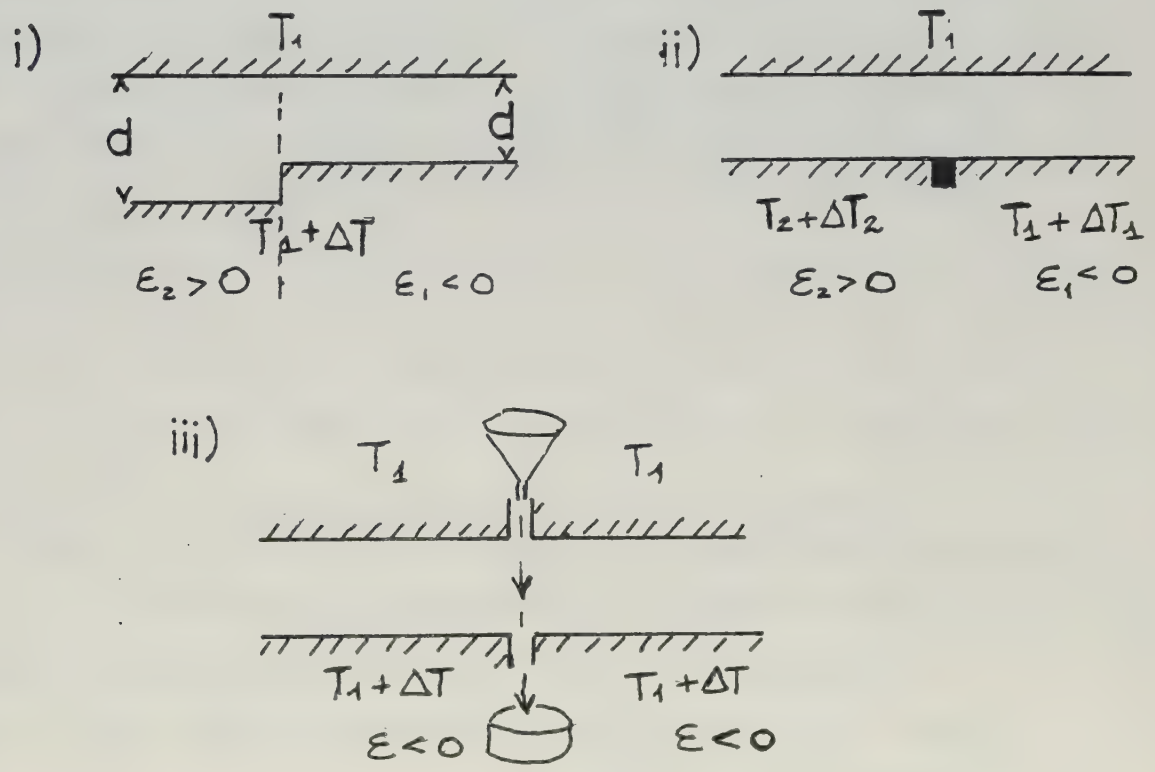


Figure 1.

L'idée de base est d'avoir une region étendue à $R < R_c$ et une région avec du fluide en mouvement permanent. L'origine de ce mouvement peut être la convection de Rayleigh-Bénard elle même, comme dans les deux premiers schémas.

Dans tous les cas (on peut imaginer encore d'autres types de perturbations), un ensemble de rouleaux nait dans la région à $\varepsilon < 0$, avec une amplitude de vitesse ou de perturbation de température amortie spatialement.

Dans la publication II,on rapporte des résultats obtenus avec le dispositif de la fig. 1 ii), car il permet de mieux contrôler la perturbation inductrice, dans la région de $\varepsilon > 0$, à l'aide d'un chauffage électrique supplémentaire pour fixer ΔT_1 telle qu'on l'a discutée dans le chapitre 5.10.

L'équation de Landau (cf. ch. 3.6), ou d'amplitude, permet de représenter clairement cette situation :

$$\tau_o \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} = - |\varepsilon| \tilde{V} - \frac{\tilde{V}^3}{V_o^2} + \xi_o^2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2} \quad , \quad (1)$$

avec $\varepsilon = (R - R_c)/R_c < 0$.

On peut observer que le terme dû à l'inhomogénéité spatiale ($\sim \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2}$: concavité de l'enveloppe) est analogue à un terme de force. Il est destabilisant quand la concavité de l'enveloppe est tournée vers le haut (concavité "positive"), et peut équilibrer ainsi la partie stabilisante due à $R < R_c$ et la saturation non linéaire ($-|\varepsilon| \tilde{V} - \tilde{V}^3/V_o^2 < 0$). C'est le cas quand, par exemple, il y a dans les bords une condition $\tilde{V} \neq 0$ (Fig.2 i). Au contraire, la présence de deux parois imposent une concavité négative, donc il n'y a pas de possibilité d'avoir une convection sous-critique (Fig. 2ii).

La solution pour l'amplitude, dans une région où $x > 0$, avec une perturbation $\tilde{V}_p$ en $x = 0$ est $\tilde{V}(x) = \tilde{V}_p e^{-x/\xi^-}$, où $\xi^- = \xi_o |\varepsilon|^{-0.5}$, qui est la solution stationnaire de l'équation (1) linéarisée.

On peut négliger le terme non-linéaire, dans le cas $\tilde{V}_p << V_o |\varepsilon|^{1/2}$ (comme c'est le cas dans nos expériences, voir publication II), car $\tilde{V}_p \geq \tilde{V}(x)$, donc $|\varepsilon| \tilde{V} >> \tilde{V}^3/V_o^2$.

On a ajusté les points expérimentaux du profil de vitesse avec cette loi de décroissance exponentielle : $\tilde{v}_i = \tilde{V}(x)[\sin q(x - x_o)]$ pour obtenir les paramètres $\tilde{V}p$ et ξ^-. Des mesures pour différentes valeurs de $\varepsilon < 0$, ont permis de déterminer la loi $\xi^- = \xi_o |\varepsilon|^{-\nu}$, avec $\nu \simeq 0.5$.

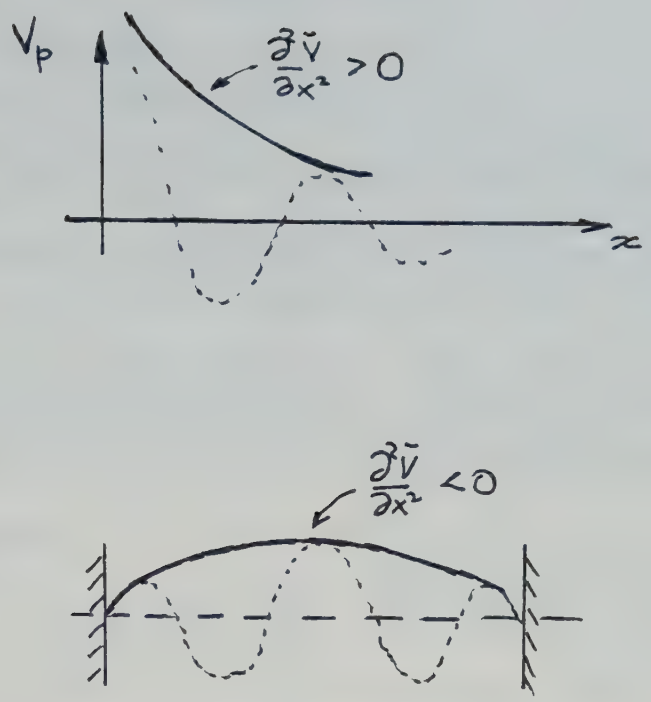


Figure 2

On a donc, une continuité du comportement critique, pour cette longueur de corrélation (ici exprimée comme une longueur de pénétration*) des deux cotés du point de transition R_c.

Notons que dans le cas surcritique ($R > R_c$), cette longueur (exprimée comme une longueur d'influence) est $\xi^+ = \sqrt{2}\ \xi_o\ \varepsilon^{-0.5}$ (pour Lx infinie) et dans le cas sous-critique ($R < R_c$) est $\xi^- = \xi_o |\varepsilon|^{-0.5}$; on remarque qu'il existe une relation simple entre les deux amplitudes ξ_o^+ et ξ_o^-, telle que $\xi_o^+/\xi_o^- = \sqrt{2}$.

Mais pour le cas $R > R_c$, la perturbation d'amplitude $\delta\tilde{V}$ est du même ordre de grandeur que $\tilde{V}_{\text{équilibre}} = V_o \varepsilon^{0.5}$. Si, par contre, $\delta\tilde{V} \ll \tilde{V}_{eq}$, on peut montrer que $\xi^+ = \xi_o/\sqrt{2}$ (si $\tilde{V} = \tilde{V}_{eq} + \delta\tilde{V}$, l'équation de Landau devient, dans le cas stationnaire :

$$0 = \varepsilon\delta\tilde{V} + \xi_o^2 \frac{\partial^2 \delta\tilde{V}}{\partial x^2} - 3 \frac{\tilde{V}_{eq}^2 \delta\tilde{V}}{V_o^2} + \ldots =$$

$$= -2\varepsilon\delta\tilde{V} + \xi_o^2 \frac{\partial^2 \delta\tilde{V}}{\partial x^2} + \ldots$$

qui a la solution $\delta\tilde{V} \sim e^{-x/\xi^+}$, où $\xi^+ = \frac{\xi_o}{\sqrt{2}}\ \varepsilon^{-0.5}$)

---

* A ne pas confondre avec la pénétration convective verticale des couches convectives dans une couche supérieure [47], ou avec la longueur de pénétration utilisée en supraconductivité [48] reliée au type de conditions de surface.

Cette expérience, jointe à celle de la publication I, met en évidence la signification physique de la distance ξ comme une longueur de corrélation. Dans la phase convective ($R > R_c$), ξ correspond à la longueur sur laquelle le paramètre d'ordre $\tilde{V}$ (amplitude de la vitesse) s'écarte de sa valeur d'équilibre ($\tilde{V}_{eq} = V_o \varepsilon^{0.5}$). Dans la phase conductive ($R < R_c$), ξ correspond à la longueur sur laquelle le paramètre d'ordre $\tilde{V}$ existe (rouleaux induits).

Le phénomène de convection induite ou rouleaux sous-critiques avait déjà été observé dans certaines expériences de convection de Rayleigh-Bénard [49],[50], qu'on peut expliquer maintenant en fonction de nos résultats. Dans ces expériences, faites à $R < R_c$, on observe une série de rouleaux circulaires, induits soit par une pointe circulaire d'échauffement dans le centre d'une boite [49] , soit par des parois circulaires [50] (dans lesquelles il semble y avoir une perturbation thermique produite par la couche de fluide entre la paroi et la plaque isotherme supérieure, en plus d'un faible gradient radial de température). Le nombre de rouleaux observables croît quand R se rapproche de R_c ($\varepsilon \to 0^-$). Ils croissent à partir des régions de perturbation : le centre ou les parois. Ceci correspond à un étalement de la perturbation inductrice de vitesse, qui augmente avec ξ , quand on se rapproche de R_c (effet critique).

Ce même effet a été observé dans les boites inclinées, chauffées par le bas [51], où un rouleau (circulation convective) unique se subdivise en rouleaux de Bénard.

Nos résultats ont été appliqués [52] dans le cas de l'instabilité de Taylor-Couette pour expliquer l'apparition des rouleaux sous-critique induits par les bords des cylindres concentriques [53].

Une expérience similaire a été réalisée avec les instabilités EHD dans les cristaux liquides [54] .

Des expériences numériques sur ce même problème sont décrites dans la publication III.

PUBLICATION II

PHYSICAL REVIEW A VOLUME 19, NUMBER 3 MARCH 1979

Induced pretransitional Rayleigh-Bénard convection

J. Wesfreid, P. Bergé, and M. Dubois

Commissariat à l'Energie Atomique, Division de la Physique Service de Physique du Solide et de Resonance Magnetique, Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, 91190-Gif-sur-Yvette, France

(Received 9 June 1978)

We study the properties of subcritical Rayleigh-Bénard rolls induced by a triggering velocity applied to one side of a fluid layer maintained in controlled subcritical conditions. The induced rolls are spatially damped exponentially with increasing distance from the position of the triggering velocity. We point out a remarkable critical behavior of a characteristic penetration length ξ ($\xi = \xi_0 \epsilon^{-\nu}$). The values of $\nu = 0.50 \pm 0.02$ and $\xi_0 = (0.38 \pm 0.01)d$ are in perfect agreement with those calculated according to the Landau-Hopf model.

INTRODUCTION

In a horizontal fluid layer, confined between two rigid plates, heated from below, convective motion takes place if the Rayleigh number R of the fluid is higher than a critical value R_c. If the layer, depth of which is d, is laterally bounded by a rectangular frame, the convective structure consists of straight, bidimensional rolls of wavelength $\Lambda_c \sim 2d$.[1,2]

Detailed optical measurements of the local velocity allow one to obtain quantitative knowledge of the convective state.[3,4] We have previously shown[5] the analogy between the onset of the convection and a second-order-phase transition. Many of the consequences of the mean-field Landau description have been quantitatively checked namely; (i) the dependence of the velocity amplitude on the parameter ϵ [$\epsilon = (R - R_c)/R_c$] given by $V = V_0 \epsilon^{0.5}$ (i.e., $\beta = 0.5$); (ii) a critical slowing down of the time relaxation of the velocity after a perturbation, described by $\tau = \tau_0 \epsilon^{-1}$; (iii) the existence of a critical influence length ξ^+ for the spatial relaxation of a local velocity perturbation, with $\xi^+ = \sqrt{2}\,\xi_0 \epsilon^{-0.5}$. ξ_0 has a universal value ($\xi_0 = 0.385d$), for the rigid-rigid horizontal boundaries.

The aim of this paper is to extend the study of this critical behavior to the subcritical domain, i.e., when $R < R_c$. We describe here a new effect; the *controlled* induction of subcritical, space damped, rolls by a triggering velocity applied to a layer submitted to a *negative value* of ϵ.

I. EXPERIMENTAL SETUP

The fluid layer is confined inside a horizontal rectangular plexiglass frame (great extension L along the X axis, small side l along the Y axis) and between two horizontal copper plates as described previously.[4,5]

In the present experiment however, the bottom plate, although perfectly plane, is separated into two thermally independent sections, one extending from $X = 0$ to $X = X_0$ and the other one from $X = X_0$ to $X = L$.

With this set up the thermal gradient applied to both parts of the fluid layer can be adjusted independently. So we adjust $\Delta T_1 > \Delta T_c$ for $X < X_0$ when the main part of the layer $X > X_0$ is kept at $\Delta T_2 < \Delta T_c$. The adjustable convective velocity present in the supercritical part $X < X_0$ induces rolls in the subcritical layer $X > X_0$. In practice $X_0 = 2d$, $L = 30d$, and $d = 0.6$ cm; the extension along the short size of the frame is $l = 5d$.

The fluid we have studied is silicone oil having a viscosity $\nu = 0.56$ stokes and a thermal diffusivity $D_T = 1.13 \times 10^{-3}$ cm^2 sec^{-1}; the critical temperature difference ΔT_c being 4.51 °C. We measured the horizontal component of the velocity V_x with a spec-

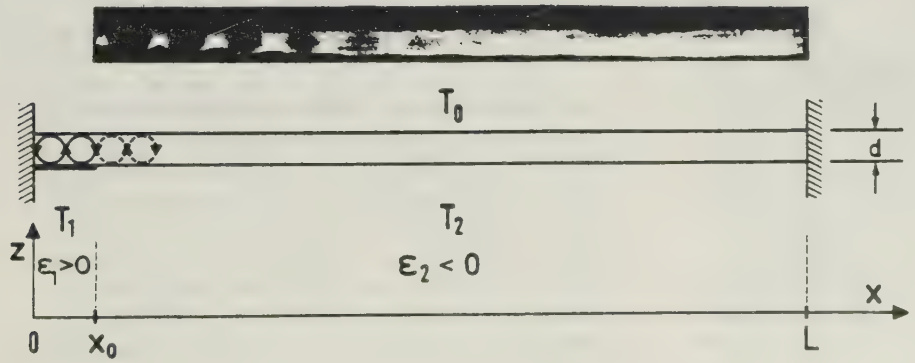


FIG. 1. Scheme of the convection cell and light focalization image of the induced convective structure.

 © 1979 The American Physical Society

ial laser doppler anemometer, which can measure velocities lower than 1 μm sec^{-1}.

The reported $V_x = f(X)$ characteristics correspond to measurements done at the level $Z = 0.2d$, which corresponds to the maximum of V_x as a function of Z.

We can see from direct visualisation that the convective velocity present in the supercritical part of the layer ($X \leq X_0$) triggers well-defined space damped rolls in the subcritical layer ($X > X_0$ in which we keep $\epsilon < 0$). The visualisation as shown in Fig. 1, and which corresponds only to the subcritical part of the layer in which $|\epsilon| \ll 1$, is produced by light focalisation due to the ordered colder downward streams. The pretransitional state of the layer allows a remarkable effect of penetration of the convective motion under the form of bidimensional rolls having a defined wavelength $\Lambda = \Lambda_c \simeq 2d$, where Λ_c is the critical wavelength.

Note that in this kind of experiment the induced structure is practically free (semi-infinite case), and therefore strictly corresponds to the preferred mode without boundary influence. We now show how the experimental behavior of this induced structure can be understood quantitatively using a theory based on the Landau-Hopf model.

II. THEORETICAL BACKGROUND

In the case of bidimensional convective rolls of wavelength Λ, the horizontal velocity component V_x is described, when $0 < \epsilon < 1$, by

$$V_x(X) = \tilde{V} \sin(2\pi X/\Lambda + \varphi),$$

where $\tilde{V}$ is the amplitude of the velocity field and φ is a function of the lateral boundary conditions.

The Landau-Hopf model, previously used[5] to interpret convective properties in a finite cell for $\epsilon > 0$, was expressed, according to the following relation for $\tilde{V}$

$$\tau_0 \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} = \epsilon \tilde{V} - \frac{\tilde{V}^3}{V_0^2} + \xi_0^2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial X^2}, \qquad (1)$$

where τ_0 and ξ_0 are the characteristic time and length, respectively. V_0 is the amplitude velocity at $\epsilon = 1$.

A solution of (1) in the stationary state of semi-infinite systems is $\tilde{V} = V_0 \epsilon^{1/2} tgh(X/\xi^+)$, which has been quantitatively checked in.[5] Because of the properties of the induced structure mentioned above, we can describe the subcritical situation from (1) by replacing ϵ by $-|\epsilon|$. The new boundary conditions are $\tilde{V}(x_1) = V_p$,[6] where V_p is the triggering velocity due to the supercritical region in the layer, and $\tilde{V}(X - \infty) = 0$, since the extension L of the cell is great at least in comparison with all observable ξ^- (length of the penetration phenomenon). In the particular case, where the ratio $\tilde{V}^2/V_0^2|\epsilon|$ is maintained < 1 (and we did this experimentally by the adjustment of the V_p amplitude), we have only to consider the solution of the linearized stationary equation (1):

$$\tilde{V}(X) = V_p e^{-(X - X_1)/\xi^-}, \quad \xi^- = \xi_0 |\epsilon|^{-1/2}. \qquad (2)$$

We therefore expect to have a spatial exponential decay in the velocity amplitude of the induced rolls, with a critical influence length ξ^-.

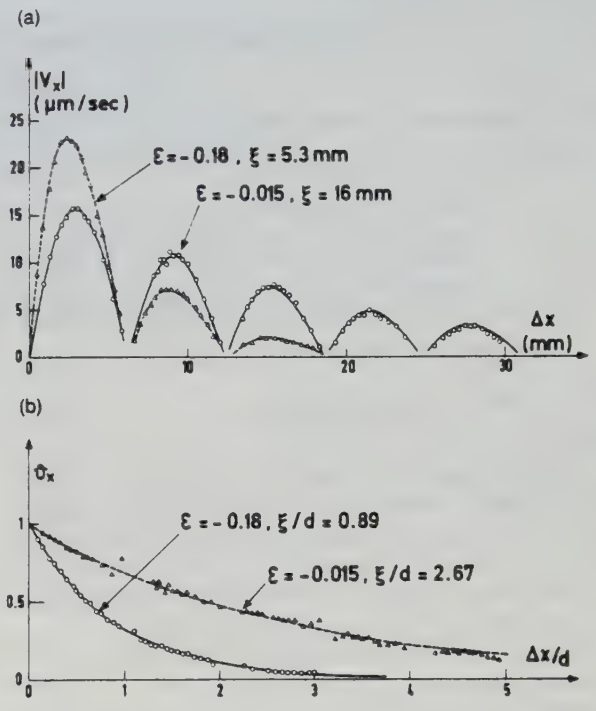


FIG. 2. (a) Measured amplitudes of the V_x component in the subcritical layer for different ϵ and V_p values ($\Delta X = X - X_1$). (b) Dependence of the measured ratio $v_x = V_x(V_p \sin 2\pi X/\Lambda)^{-1}$ vs $\Delta X/d$; line represents the best fit with a law such as $v_x = e^{-\Delta x/\xi^-}$.

III. EXPERIMENTAL RESULTS

Systematic measurements of the characteristics $V_x = f(X)$ have been made for different values of $|\epsilon|$ of the subcritical layer, with maximum amplitude V of the triggering velocity such as $V \ll V_0 |\epsilon|^{0.5}$ in order to allow the comparison of the results with the formula (2). In Fig. 2(a) one can see the effect of ϵ on the extension of the penetrative convection. We also checked that the characteristic penetration length does not depend on the amplitude of the triggering velocity.

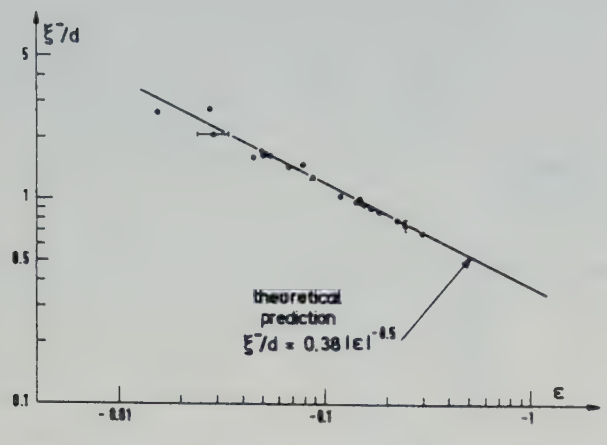


FIG. 3. Dependence of the reduced penetration length ξ^-/d vs ϵ. Full line gives the theoretical expectation.

In order to test the agreement with the theoretically expected penetration profile, we show in Fig. 2(b) the variation of the ratio

$$v_x = \frac{V_x(X)}{V_p \sin 2\pi(X - X_1)/\Lambda}$$

with X; the comparison with an exponential decay shows that the dependence of V on X follows the expected relation

$$\tilde{V} = V_p \exp(-|X - X_1|/\xi^-)$$

to a good approximation.

From such dependences obtained at different ϵ values, we can deduce that the experimental dependence $\xi^- = f(\epsilon)$, which is

$$\xi^- = (0.378 \pm 0.014) d\,|\epsilon|^{-0.505 \pm 0.016},$$

is in good agreement with the theoretically expected law $\xi^- = 0.385 d\,|\epsilon|^{-0.5}$ (see Fig. 3).

CONCLUSION

Study of the induced pretransitional convection provides a powerful experimental test of the continuity of the critical behavior below and above the Rayleigh-Bénard threshold. The critical exponents are classical in the two cases, and the ratio of the critical characteristic lengths ξ^+ to ξ^- (obtained for $\epsilon > 0$ and for $\epsilon < 0$, respectively) is $\sqrt{2}$, all results which are predicted by the Landau-Hopf model. Our results can also be related to theoretical works, which studied the effects of an external perturbation in subcritical Taylor[7] or Rayleigh-Bénard[8-11] instabilities. Moreover the so-induced motion can probably explain the subcritical rolls observed by Koschmieder and Pallas.[12]

Moreover, it is interesting to note the analogy of the results of this study with the behavior of the second-order gas-liquid critical transition; in the homogeneous phase, any local "perturbation" is extended along domains, the size of which is ξ (correlation length which diverges as $[(T - T_c)/T_c]^{-\nu}$).

ACKNOWLEDGMENTS

We wish to thank P. G. de Gennes, Y. Pomeau, and C. Normand for stimulating discussions, and M. Labouise and B. Ozenda for helpful technical support.

---

[1]G. Z. Gershuni and E. M. Zhukhovitskii, *Convective stability of incompressible fluids* (Keterpress, Jerusalem, 1976).
[2]C. Normand, Y. Pomeau, and M. G. Velarde, Rev. Mod. Phys., 49, 581 (1977).
[3]P. Bergé, *Fluctuations, instabilities and phase transitions* (Plenum, New York, 1975), Vol. B11, p. 323.
[4]M. Dubois and P. Bergé, J. Fluid Mech. 85, 641 (1978).
[5]J. Wesfreid, Y. Pomeau, M. Dubois, C. Normand, and P. Bergé, J. Phys. (Paris) 39, 725 (1978).
[6]Velocity measurements show that the origin of the induced structure vs X is $X_1 > X_0$, very close to X_0.
[7]T. B. Benjamin, Proc. R. Soc. Lond. A 359, 1 (1978).
[8]P. G. Daniels, Proc. R. Soc. Lond. A 358, 173 (1977).
[9]P. Hall and I. C. Walton, Proc. R. Soc. Lond. A 358, 199 (1977).
[10]S. N. Brown and K. Stewartson, Stud. Appl. Math. 57, 187 (1978).
[11]J. Tavantzis, E. L. Reiss, and B. J. Matkowsky, SIAM J. Appl. Math. 34, 322 (1978).
[12]E. L. Koschmieder and S. G. Pallas, Int. J. Heat. Mass Transfer 17, 991 (1974).

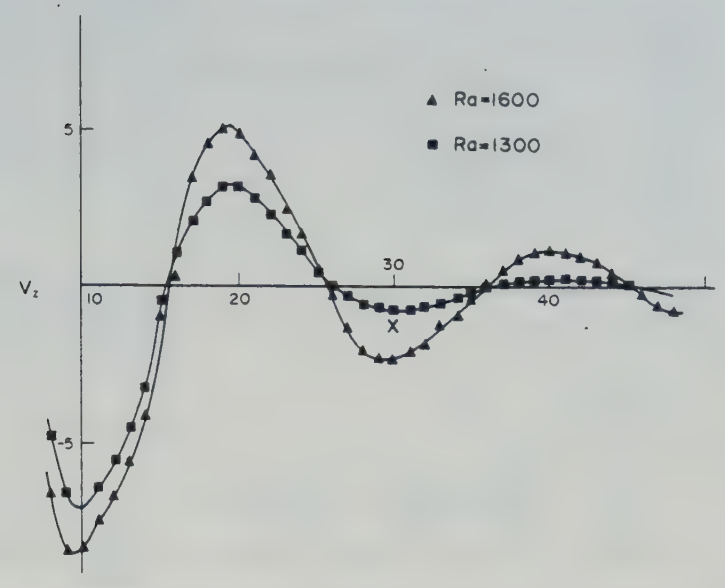


FIG. 1. The absolute value of the vertical component of the velocity $|V_Z|$ as a function of X in the induced rolls for $Ra = 1600$ and 1300. The first triggering rolls are not represented.

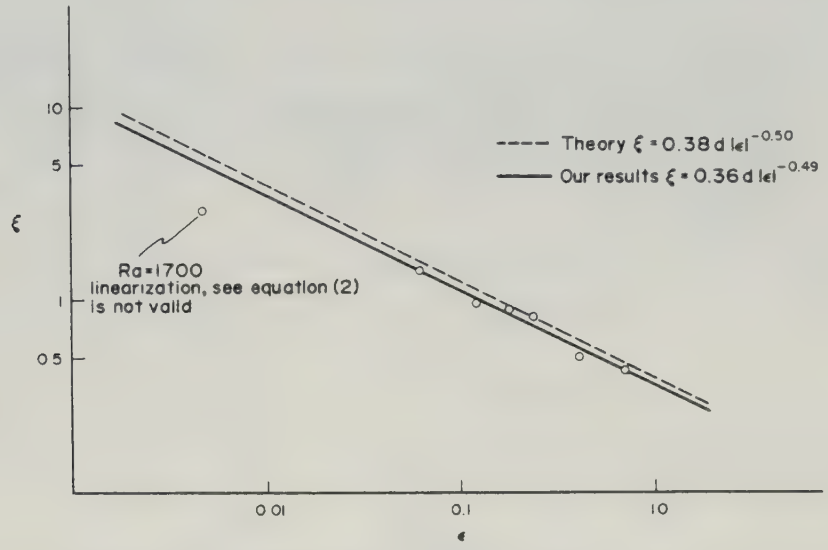


FIG. 2. The length of penetration as a function of ε for $Ra = 1700$, 1600, 1500, 1400, 1300, 1000, 500 estimated from $|V_Z|$.

and thus

$$\mathbf{v} = (v_X, v_Z) = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial Z}, -\frac{\partial \Psi}{\partial X}\right). \tag{6}$$

In a first run, the Rayleigh number is fixed equal to 3500 and a small perturbation is imposed to the system. The numerical integration is continued until the steady state is obtained. For the other runs, the initial condition corresponds to a subcritical Rayleigh number and a state of rest everywhere, except for the grid points in the left part of the simulated apparatus which belong to the first roll. The stream function Ψ and the temperature values θ at each grid point in this first roll are put equal to those ones coming from the first run with $Ra = 3500$ and are not allowed to vary during the numerical integration. Details on the numerical procedure can be found elsewhere [3], [4]. Induced rolls spread out in the whole apparatus.

3. RESULTS

Values of the temperature θ and of the stream function Ψ at each grid point i,j of the discretized two-dimensional space (we used a grid 100×14) have been obtained for different values of ε corresponding to subcritical conditions.

In Fig. 1, we show at the steady state two systems of rolls whose vertical velocity amplitudes decay almost exponentially with X. The first roll at the left imposes a triggering velocity. This experiment was repeated for different values of Ra. One can see on Fig. 2, the effect of ε on the extension of the penetration convection. We obtained for the dependence $\xi^- = f(\varepsilon)$ calculated from the values of the vertical component of the velocities at $Z = 1/2d$:

$$\xi^- = 0.36d|\varepsilon|^{-0.49}. \tag{7}$$

This is in a good agreement with the results given in Section 1 for V_X. We should like to note here, that the X

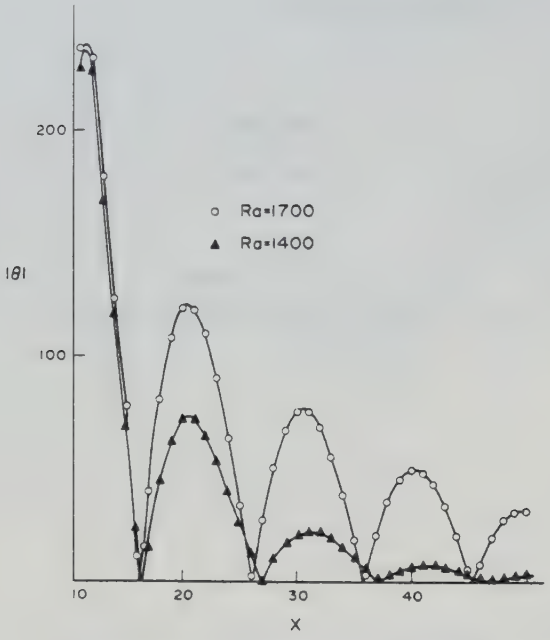


FIG. 3. Temperature perturbation θ in the induced rolls as a function of X is presented for $Ra = 1700$ and 1400. The first triggering rolls are not represented.

dependence of the successive maxima of Ψ has to obey in a first approximation the same law as V_Z [5].

In the same manner, an influence length can be deduced from the temperature perturbation amplitudes. The temperature perturbation amplitudes θ in the midplane of the simulated cell are plotted as a function of X in Fig. 3, for two different values of ε. We write in similarity with equation (2)

$$\bar{\theta}(X) = \theta_M \exp - X/\xi^-, \tag{8}$$

where θ is the amplitude of the temperature perturbation distribution, θ_M is the maximum temperature perturbation, occurring at the limit between the triggering cell and the first induced one. In order to verify the spatial exponential decay in the temperature perturbation amplitude of the induced rolls, we plotted $\ln\theta$ vs X. This yields the value of ξ^- for a particular ε. The experiment is repeated for $Ra = 1700, 1600, 1500, 1400, 1300, 1000, 500$. For each ε we determine ξ; the values are plotted on Fig. 4 and obey the law

$$\xi = 0.37 d|\varepsilon|^{-0.48}. \tag{9}$$

This obtained dependence is in very good agreement with the results given in Section 1 from the velocity distribution. Our results obtained from the direct integration of the Boussinesq equations, confirm the validity of the Landau–Hopf model for this problem.

Acknowledgements—We are grateful to Drs. P. Bergé and M. Dubois from C. E. A. Saclay for inducing this work.

REFERENCES

1. J. Wesfreid, P. Bergé and M. Dubois, Induced pre-transitional Rayleigh Bénard convection, *Phys. Rev.* To be published.
2. J. C. Legros and J. K. Platten, Nonlinear temperature and velocity distributions in the two-dimensional Bénard problem, *Phys. Lett.* **65A**, 89–91 (1978).
3. J. C. Legros and J. K. Platten, Etude numérique non linéaire de la convection libre à deux dimensions in *Instabilités Hydrodynamiques en Convection Libre, Forcée et Mixte*, edited by J. C. Legros and J. K. Platten, *Lecture Notes in Physics* **72**, 152–169 (1978).
4. G. Chavepeyer, Intérêt de la méthode des différences finies pour l'étude non linéaire du problème de Bénard dans les mélanges, *Bull. Acad. R. Belg. Cl. Sci.* **80**, 1433–1467 (1974).
5. J. K. Platten, J. Wesfreid and J. C. Legros, Influence of a lateral boundary on thermal convection: modulation of the amplitude of the velocity of a convective rolls system, To be published.

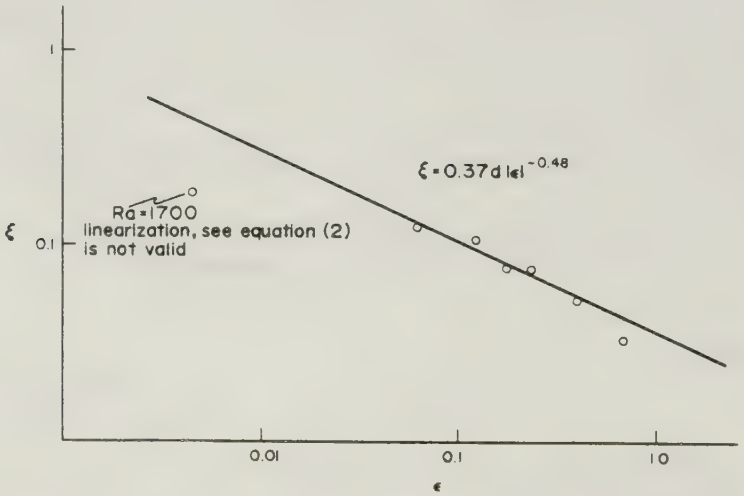


FIG. 4. The length of penetration as a function of ε for $Ra = 1700, 1600, 1500, 1400, 1300, 1000, 500$ estimated from θ.

PUBLICATION IV

Wavenumber variations of spatially damped Rayleigh–Bénard convection

P. Atten

Laboratoire d'Electrostatique, Centre National de la Recherche Scientifique, 166 X 38042 Grenoble, France

J. E. Wesfreid[a)]

Centre d'Etudes Nucléaires, Saclay, 91190 Gif sur Yvette, France
(Received 23 April 1980; accepted 23 September 1980)

Under subcritical conditions, it is shown that a spatial variation of the velocity amplitude of convective rolls is accompanied by a modification in their wavenumber which takes values lower than the critical one.

The question of the analogy between second-order phase transitions and hydrodynamic instabilities as exhibited, for instance, by the Rayleigh–Bénard problem has received much attention in recent years. In particular, Wesfreid *et al.*[1] found that the convection induced at one side of a Rayleigh–Bénard box maintained under subcritical conditions exhibits a spatial exponential decay of the amplitude of the rolls with a characteristic length ξ_- varying as $\epsilon^{-1/2}$, where $\epsilon = (R_c - R)/R_c$, R and R_c being the imposed and critical Rayleigh numbers. The numerical simulation of such a triggered subcritical convection in the electrohydrodynamic case[2] further revealed a decrease in the wavenumber k when R decreases below R_c, a feature also visible from a similar study in the Rayleigh–Bénard case.[3]

Here, we focus on this wavenumber variation with the idea that a spatial modulation of the amplitude of the rolls is necessarily accompanied by a variation in the wavenumber. In this view the problem might have some relevance to the supercritical conditions ($R > R_c$) where a decrease in k vs R has been observed.[4]

Let us return to the Rayleigh–Bénard problem under subcritical conditions ($R < R_c$) with a triggered convection roll of low enough amplitude so that the z component of the velocity w satisfies the linear equation

$$\nabla^6 w = R \nabla_1^2 w . \tag{1}$$

Seeking for an asymptotic solution of the form

$$w(x,z) = W(z) \exp(ikx - \alpha x) ,$$

Eq. (1) gives

$$(D^2 + \gamma^2)^3 W = R\gamma^2 W , \tag{2}$$

where $D = d/dz$ and $\gamma = ik - \alpha$. In the case of two horizontal free surfaces, the solution of (2) with the corresponding boundary conditions is $W(z) = \sin \pi z$ which leads to

$$(\gamma^2 - \pi^2)^3 = R\gamma^2 . \tag{3}$$

Since R is real, Eq. (3) gives two equations (relative to real and imaginary parts) relating the two variables α and k. For $R < R_c$, these equations have a unique couple of real roots ($\alpha > 0$). Figure 1(a) shows that k increases with R ($R < R_c$). For $R \to 0$, we can deduce from (3) the asymptotic expressions

$$k \simeq (\sqrt{3}/4)(R/\pi)^{1/3}, \quad \alpha \simeq \pi - \tfrac{1}{4}(R/\pi)^{1/3} .$$

For $R \to R_c (\epsilon \to 0)$, it is easy to see that k and α^2 vary linearly with ϵ. Putting

$$k = k_c(1 + a\epsilon), \quad \alpha^2 = k_c^2 b\epsilon ,$$

with $k_c = \pi/\sqrt{2}$, we obtain, after substitutions, $a = -7/24 = -0.292$ and $b = \frac{3}{4}$. The formula obtained, $\alpha = \sqrt{3/2} \times (\pi/2)\epsilon^{1/2}$, is identical to the law for the influence length $\xi_-(\xi_- = \alpha^{-1})$ given by Wesfreid *et al.*[5] for the free–

 0031-9171/81/010173-02$00.90 © 1981 American Institute of Physics

free boundaries. The significant result here is the decrease in the wavenumber k as R is decreased below R_c.

Except for R close to 0, a similar behavior prevails in the case of two rigid horizontal walls. The calculus is not so straightforward because the solutions of (2) must be expressed as a combination of particular solutions of (2). The exact results are plotted in Fig. 1(a). We can derive an approximate value for the coefficients a and b of the asymptotic expressions of k and α^2. In the rigid case we have a relation entirely analogous to (3)

$$R = A/\gamma^2 + B + C\gamma^2 + D\gamma^4 ,$$

which gives for a and b,

$$b = \frac{R_c}{4k_c^2(C + 3Dk_c^2)}, \quad a = \frac{b(C + Dk_c^2)}{2(C + 3Dk_c^2)} .$$

Taking for C, D, R_c, and k_c, the classical approximate values (see Ref. 6), we obtain $b \simeq 0.69$ which gives $\xi_0^2 = 0.150$ instead of the more exact value[5] $\xi_0^2 = 0.148$ and $a = -0.24$ close to the slope value -0.243 as obtained from the exact solution.

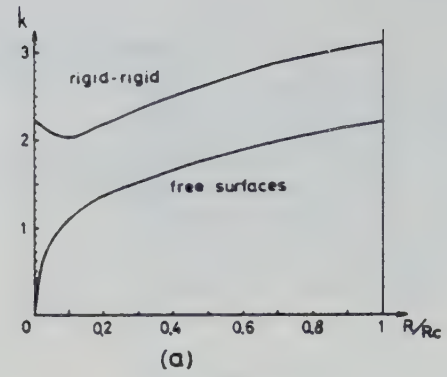
The prediction concerning the decrease in k vs ϵ can be compared with the experimental results of Ref. 1. In this paper the authors were primarily interested in the correlation length ξ_-. The results given there were determined using a statistical program[7] fitting the experimental values of the horizontal velocity component by a law of the form

$$u(x) = U_0 \exp\left(-\frac{x - x_0}{\xi_-}\right) \sin k\left(\frac{x - x_0}{d}\right) ;$$

the different parameters U_0, x_0, ξ_-, and k being varied freely. The values of k which correspond to the best fit (the values of ξ_- are given in Ref. 1) are plotted in Fig. 1(b). No significant results could be obtained for $\epsilon > 0.3$ because of the strong spatial damping of the perturbations far below R_c.

Let us notice that although k ranges in a rather narrow gap, there is a clear tendency to a decrease in k when R is decreased as predicted by the present theory. The agreement between the experimental and theoretical values of the wavenumber is satisfactory except when R is close to R_c for which $k_{exp} < k_{th}$. This slight deviation might be ascribed to dynamic effects: When R approaches R_c, the correlation length ξ_- and therefore the horizontal typical time which is proportional to ξ_-^2/D (where D is the thermal diffusivity) increase strongly and become of the order of the stabilization time spent before performing the velocity measurements. In addition, it seems that a particularly slow diffusion process takes place for roll accommodation (phase changes).[8]

As a conjecture let us first expect similar variations in k near a lateral wall under supercritical conditions (stationary convection), although a theoretical derivation in that case appears much more intricate. More generally, such effects should exist in time-dependent Rayleigh–Bénard convection at low Rayleigh number. Except for the case where the amplitudes of the rolls all vary in phase, the time variation of the velocity amplitudes implies a spatial variation connected with a change in the wavenumber of the different rolls. In this picture a treatment of the time-dependent convection should include both amplitude and wavenumber variations.



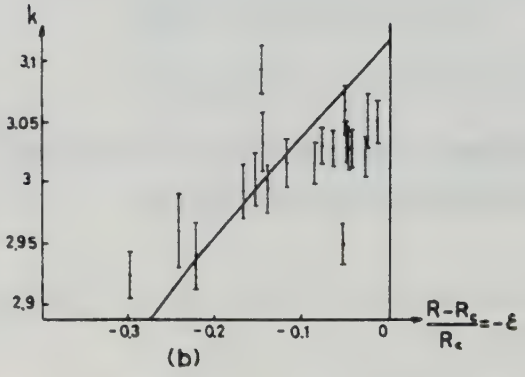


FIG. 1. Variations of the wavenumber k as a function of the stability parameter R/R_c. (a) Calculated values for free surfaces and rigid walls. (b) Experimental results and calculated values in the rigid–rigid case.

[a] Present address: Laboratoire d'Hydrodynamique et de Mécanique Physique, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielle de Paris 75005 Paris.

[1] J. E. Wesfreid, P. Bergé, and M. Dubois, Phys. Rev. A 19, 1231 (1979).
[2] B. Malraison and P. Atten (to be published).
[3] J. C. Legros, J. E. Wesfreid, and J. K. Platten, Int. J. Heat Mass Transfer 22, 976 (1979).
[4] E. L. Koschmieder, in Proceedings of the 17th International Solvay Conference (to be published).
[5] J. E. Wesfreid, Y. Pomeau, M. Dubois, C. Normand, and P. Bergé, J. Phys. Lett. (Paris) 39, L-725 (1978).
[6] G. Z. Gershuni and E. M. Zhukhovitskii, *Convective Stability of Incompressible Fluids* (Keterpress, Jerusalem, 1976).
[7] M. Tournarie, J. Phys. (Paris) 30, 47 (1969).
[8] Y. Pomeau and P. Manneville, J. Phys. Lett. (Paris) 40, L-609 (1979).

APPENDICE A LA PUBLICATION IV :

La résolution du problème de Rayleigh-Bénard dans le cas de conditions limites horizontales rigides dans le haut et le bas, exige des résolutions numériques complexes (voir publication I). Dans certains problèmes, comme celui envisagé dans cette publication pour la détermination du nombre d'onde dans le cas sous-critique, une méthode approchée a été utilisée.

On reprend ici ce développement. L'idée de base est d'utiliser comme fonctions f(z), pour le profil de vitesse selon z, le plus simple polynôme en z qui vérifie les quatre conditions aux limites :

$$v_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \text{sur } z = 0 \text{ et } 1 \qquad (0 \text{ et } d)$$

Un tel polynôme est $f(z) = z^2 - 2z^3 + z^4 = z^2(1-z)^2$ [12b] .

En faisant la même démarche pour la perturbation de température avec les conditions aux limites

$$\theta = \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{sur } z = 0 \text{ et } 1 \ ,$$

on trouve le polynôme $\varphi(z) = z - 2z^3 + z^4 = z(1-z)(1+2z-z^2)$. (La condition $\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0$ provient de l'équation 5 du chapitre 4.1, si $v_z = 0$ en $z = 0$ et 1).

En première approximation, on a pour l'étude de stabilité linéaire :

$$v_z = a\, e^{\sigma t} f(z) \sin qx$$
$$\theta = b\, e^{\sigma t} \varphi(z) \sin qx.$$

Pour trouver les valeurs de σ , on remplace ces fonctions dans le système 4'-5' du ch. 4.1. En multipliant la première équation (4') par f(z), la deuxième (5') par $\varphi(z)$ et en intégrant entre 0 et 1 pour éliminer la dépendence en z, on obtient le système suivant

$$\sigma P^{-1} (A_{20} - q^2 A_{oo}) a = (A_{40} - 2q^2 A_{20} + q^4 A_{oo}) a - q^2 R C_{oo}\, b$$

$$\sigma B_{oo}\, b = (B_{20} - q^2 B_{oo})\, b + C_{oo}\, a$$

où $A_{nm} = \int_o^1 f^{(n)}(z)\, f^{(m)}(z) dz$, $B_{nm} = \int_o^1 \varphi^{(n)}(z)\, \varphi^{(m)}(z) dz$

et $C_{mm} = \int_0^1 f^{(n)}(z)\ \varphi^{(m)}(z)\ dz.$

Les coefficients utilisés sont :

$$A_{oo} = 2 \quad , \quad A_{20} = -24 \quad , \quad A_{40} = 1008$$

$$B_{20} = -612 \ , \ B_{oo} = 62 \quad \text{et} \quad C_{oo} = 11$$

On obtient donc, la relation de dispersion suivante, analogue à celle du chapitre 4.1 pour le cas libre-libre :

$$\frac{124}{121} C \sigma^2 + \frac{4CA}{121} \sigma \left(1 + \frac{31BP}{AC}\right) + \frac{4ABP}{121} - PRq^2 = 0 \qquad (1)$$

où

$$A = A(q) = 306 + 31\ q^2$$

$$B = B(q) = 504 + 24\ q^2 + q^4$$

et $$C = C(q) = 12 + q^2$$

Le calcul donne l'approximation suivante pour la courbe de stabilité marginale ($\sigma = 0$ dans (1)) :

$$R_o(q) = \frac{4}{121} A(q)\ B(q)$$

(voir (4) dans la publication), qui a un minimum pour $R_c = 1719$.

Le nombre d'onde critique est alors $q_c = 3.12$. En opérant de la même façon que pour le cas libre-libre (cf. ch. 4.2),on trouve :

$$\tau_o = \sigma_o^{-1} = 0.051 + 0.026\ P^{-1} = (1 + 1.95P)/38.77\ P$$

et $\xi_o^2 = 0.151$. Toutes ces valeurs sont en très bon accord avec celles déduites, de façon plus exacte, dans la publication I.

On peut calculer aussi les termes d'ordre supérieurs dans l'expression de $\sigma(q,R)$, qui sont

$$O(\varepsilon^{3/2}) = \sigma_o [0.64 \delta q \varepsilon + (0.04 P^{-1} - 0.014)\ \delta_q^3]$$

Par ailleurs on sait que des oscillations amorties (type Brunt-Väisälä) peuvent apparaître pour R négatif (chauffage par le haut) quand σ devient

imaginaire [12b] . Dans le cas rigide-rigide, on peut trouver à partir de (1) une valeur approximative de $|R|$ oscillation. Cette valeur est en bon accord avec celle trouvée en [46] .

$$|R(q,P)|_{osc} = (4CAP^{-1} + 124\ B)^2/240064\ q^2 C\ P^{-1} - 4AB/121q^2.$$

7.2. *Bifurcation imparfaite et susceptibilité* :

L'existence de structures sous-critiques nous amène à généraliser le problème convectif à celui d'un phénomène critique en présence d'un champ extérieur. La convection de Rayleigh-Bénard avec vitesse induite a des analogies avec le problème de la transition ferromagnetique en présence d'un champ magnétique extérieur ou celui du flambage d'une plaque en considérant une imperfection (par exemple : le poids propre ou l'excentrement).

Nous avons effectué une expérience pour étudier la réponse d'un système convectif à une sollicitation extérieure. Pour cela, on a utilisé la cellule convective décrite dans le chapitre 5.10, avec une fente sur chaque plaque horizontale isotherme, dans laquelle on fait circuler la même huile aux silicones que celle présente dans la boite de convection. Un courant vertical est ainsi formé, d'une plaque vers l'autre. (Fig.3)

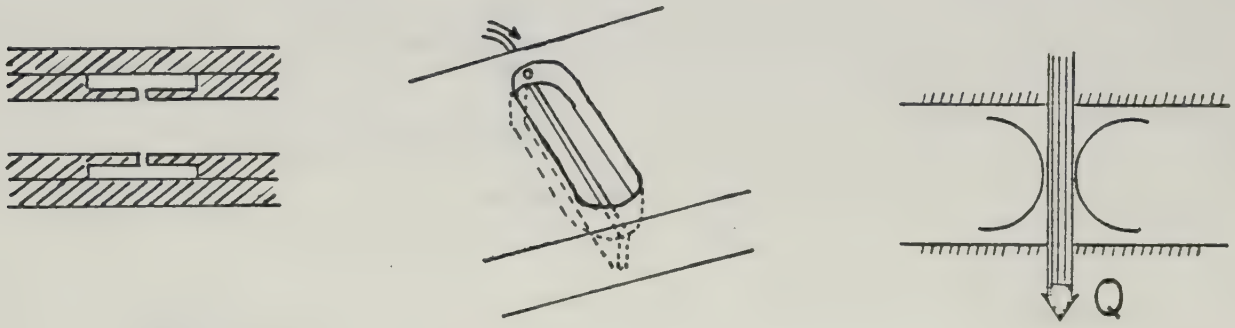


Figure 3

On aura maintenant deux paramètres de contrôle : la différence de température ΔT et le débit de l'écoulement Q.

Ainsi que nous l'avons vu dans la dernière section, pour $R < R_c$ on a des rouleaux induits (voir Fig.4), et pour $R > R_c$ on observe une augmentation locale, dans la fente, de la valeur de l'amplitude de vitesse. (Fig. 5)

Nous avons fait des mesures locales de la composante verticale de vitesse v_z, en $x = 0$ (Fig.6) où cette composante est maximale (juste sous

la fente) et à z = d/2. En augmentant R, à partir de R = 0 ($\Delta T = 0$), on observe une croissance continue de v_z (x=0,z=d/2) = $\tilde{V}(0)$ (Fig.7)

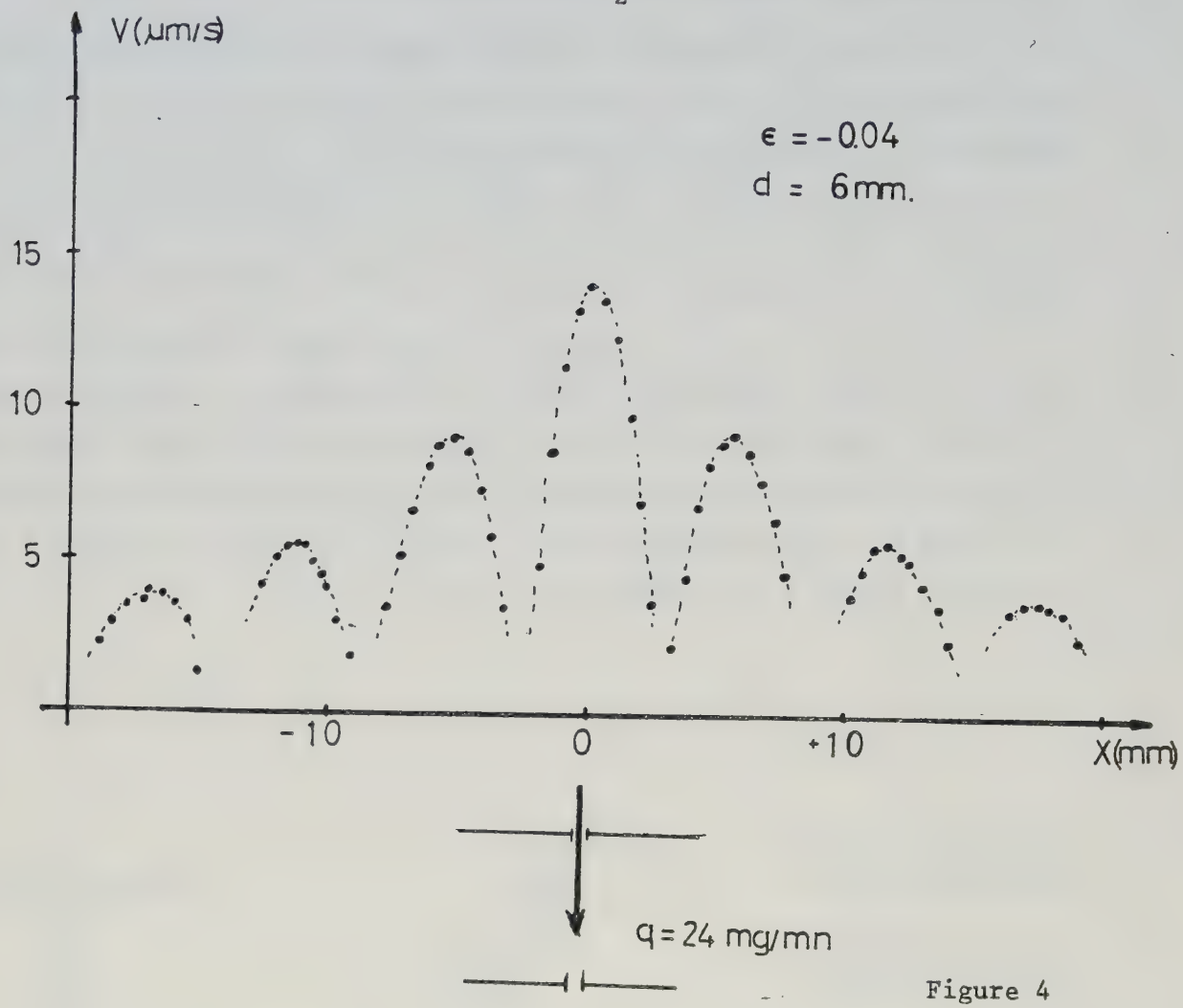


Figure 4

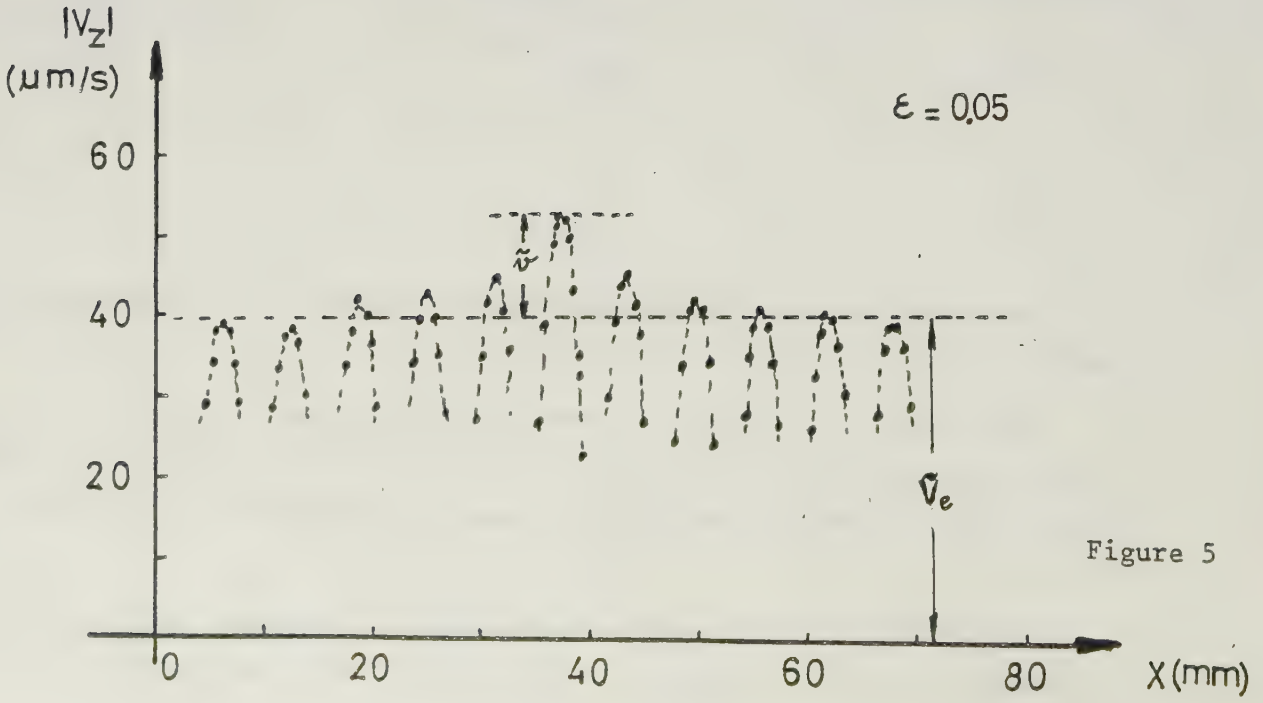


Figure 5

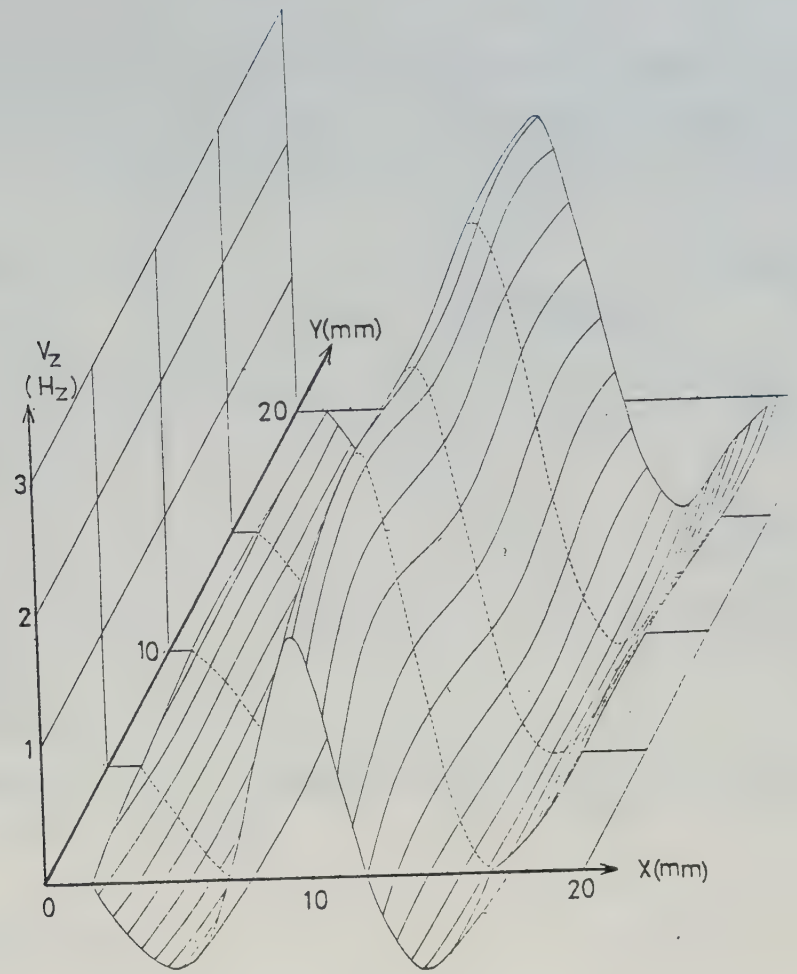
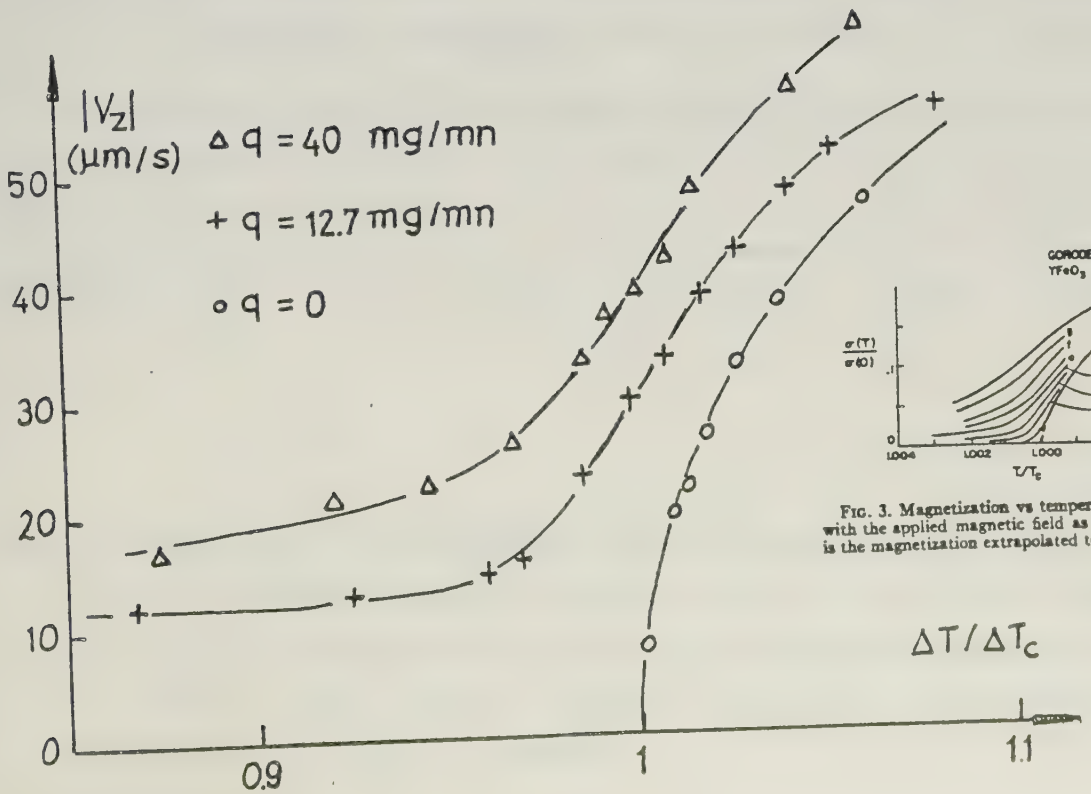


Figure 6



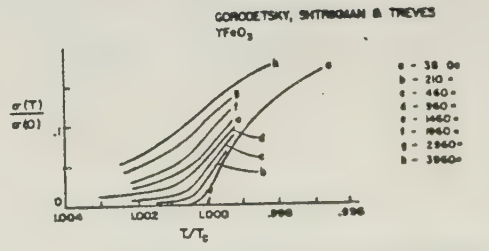


FIG. 3. Magnetization vs temperature of single-crystal $YFeO_3$ with the applied magnetic field as a parameter. The broken line is the magnetization extrapolated to $H=0$.

Si on trace la variation de vitesse $V_z(0) = \tilde{V}(0)$ en fonction du débit Q, pour chaque "iso-Rayleigh" ou "iso-Δtherme" on observe une augmentation de la pente à l'origine au voisinage de R_c (Fig.8i).

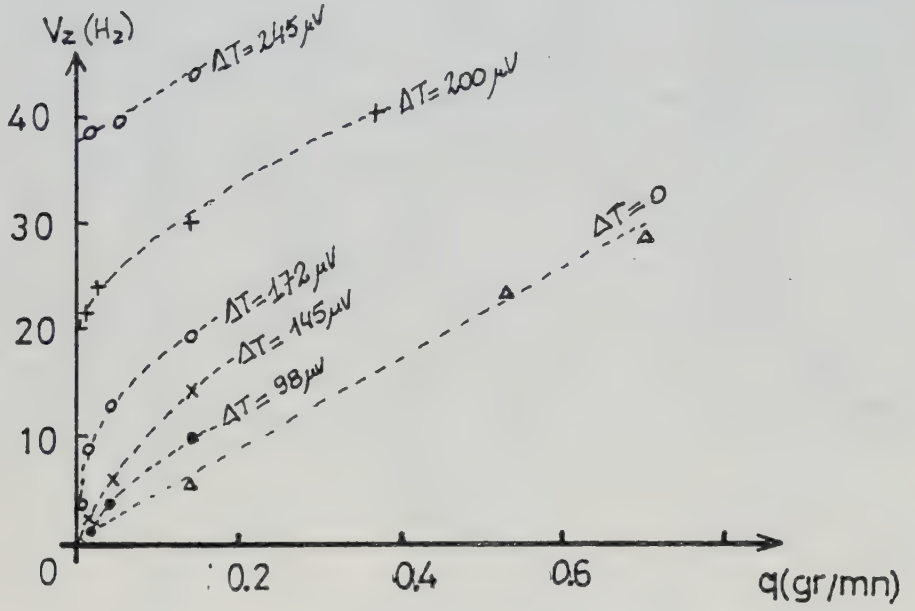


Figure 8i

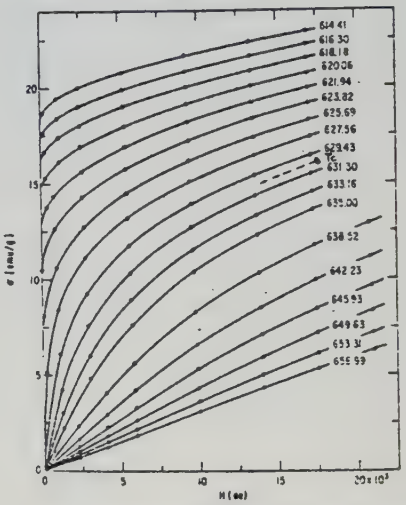


Fig. 1. Magnetization versus internal field for nickel at different temperatures, from data of Weiss and Forrer.[7]

P. Weiss and R. Forrer, Ann. Phys. (Paris) 5, 153 (1926).

Figure 8ii

Ceci traduit une augmentation de la "susceptibilité" du système $"\chi" = \left.\frac{\partial \tilde{V}(0)}{\partial Q}\right|_{Q=0}$ quand $\varepsilon \to 0$. Les caractéristiques des courbes de la Fig.8i présentent une grande ressemblance avec les courbes de la Fig.8ii relatives aux mesures de l'aimantation en fonction du champ magnétique.

Un premier essai d'interprétation de ces résultats partiels a été fait sur la base du modèle de Landau qu'on a utilisé, en considérant que Q est proportionnel au champ extérieur "H" conjugué du paramètre d'ordre $\tilde{V}$, de manière que dans le potentiel Φ (cf. Ch. 3) on ajoute un terme $\sim Q\tilde{V}$. L'équation d'amplitude devient : (nous supposons ici la structure homogène)

$$\tau_o \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} = \varepsilon \tilde{V} - \tilde{V}^3/V_o^2 + kQ \quad ,$$

où k est une constante à déterminer.

Le cas stationnaire correspond à des branches de bifurcation représentées (Fig.9) que l'on peut comparer avec les résultats de la Fig.7.

Le point de transition R_c est maintenant obtenu à partir du point d'inflexion de la branche (a). $\left(\left.\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial R^2}\right|_{Q \neq 0} = 0\right)$. [55]

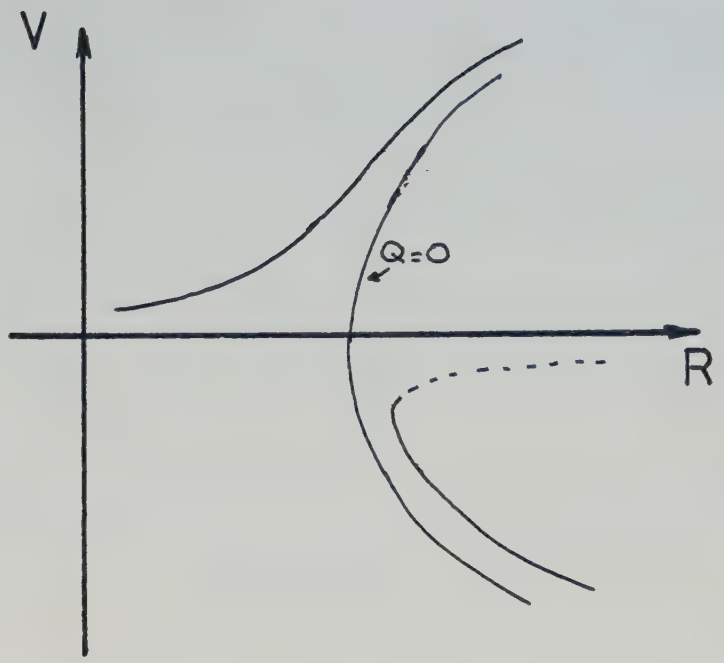


Figure 9

On aura ainsi pour la "susceptibilité" :

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial Q} = \frac{-k}{\varepsilon - 3\tilde{V}^2/V_o^2} \quad ;$$

et la "susceptibilité" initiale ($Q \to 0$) pour $\varepsilon < 0$ ($\tilde{V} = 0$ lorsque $Q \to 0$) sera :

$$\chi_o^- = -k/\varepsilon$$

et pour $\varepsilon > 0$ ($\tilde{V} = V_o\, \varepsilon^{1/2}$ lorsque $Q \to 0$)

$$\chi_o^+ = k/2\varepsilon \quad .$$

La difficulté rencontrée dans l'utilisation du modèle ci-dessus réside dans le fait que le débit Q doit correspondre à l'amplitude d'un mode de Fourier de même vecteur d'onde que celui de la structure convective ; alors que dans notre expérience, la perturbation due au débit est localisée. D'autres types d'expériences seront nécessaires pour une exploitation complète du modèle de Landau.

CHAPITRE 8

STRUCTURES NON BOUSSINESQ

Nous avons déjà décrit (ch. 6 et 7) deux types de bifurcations correspondant au problème de Rayleigh-Bénard : la bifurcation normale et la bifurcation imparfaite.

Une description complète des bifurcations pouvant exister dans notre problème nous amène à envisager ici les bifurcations inverses ou sous-critiques. Autrement dit nous n'avons analysé jusqu'ici que le cas de l'instabilité analogue à une transition de 2ème ordre ; décrivons maintenant les cas où la transition est du 1er ordre.

8.1. *Dissymétries* :

Dans la description en termes de potentiel (cf. ch. 3.3) on a considéré le cas où existent des symétries par rapport au plan médian de la couche de fluide ; ces symétries conduisent à ce que le potentiel soit invariant par rapport à des changements du type $\tilde{V} \leftrightarrow -\tilde{V}$ (où plus précisément à des changements de phase de π).

Mais il existe une famille de problèmes convectifs dans les fluides isotropes où cette caractéristique n'est pas vérifiée. C'est le cas où des dissymétries verticales existent. Elles peuvent provenir, par exemple, de la variation des constantes physiques du fluide comme ν , α et κ avec la température, donc en fonction de la hauteur de la couche, c'est ainsi que le profil (linéaire) de densité peut être modifié comme dans l'expérience de la publication V. C'est aussi le cas quand il existe une dissymétrie des conditions aux limites horizontales, par exemple dans le cas de la convection de Rayleigh-Bénard avec une surface libre ou encore, plus classiquement dans la convection des fluides avec hexagones de Bénard où le moteur convectif est la variation de la tension superficielle avec le température (effet Marangoni [12c]) localisée dans la surface supérieure libre.

La description phénoménologique de tous ces cas, pour $R \to R_c$, correspond à un potentiel Φ qui aura des termes $\tilde{V}^{(n)}$ avec n pair, comme dans le cas symétrique, mais aussi n impair ; car la restriction d'invariance par translation de $\pi/2$ n'existe plus [5] . Aussi pour le cas d'un fluide en convection de Rayleigh-Bénard avec variation de la viscosité avec la température $\nu(T)$ (pour la plupart des liquides elle décroit quand T augmente) on trouve au bas de la couche (chaude) une valeur plus petite de ν qui facilite la convection, donc les mouvements ascendants seront favorisés.

Notre expérience a été réalisée en utilisant l'anomalie de densité de l'eau au voisinage de 4°C. On sait que l'eau, sous pression atmosphérique, a un maximum de densité à $T_m = 3,98°C$ ($T_m \simeq T_2$ = température à laquelle se trouve la plaque froide) ce qui entraine une variation parabolique de la densité au voisinage de T_m

$$\rho = \rho_o (1 - \beta(T - T_m)^2)$$

(notons que le temps advectif associé à la poussée d'Archimède étant proportionnel à $\Delta\rho \simeq \rho_o \beta \Delta T^2$, le nombre de Rayleigh, d'après le Tableau I du chapitre 2, sera $R = \frac{\beta g \Delta T^2 d^3}{\nu\kappa}$)

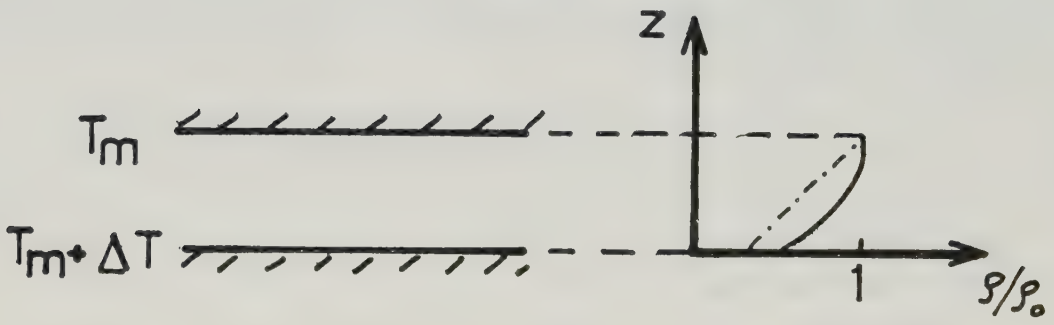


Figure 1

La poussée d'Archimède se fait sentir principalement dans le bas de la cellule (Fig.1) où la variation de densité est supérieure, et le mouvement vers le haut sera favorisé de la même façon que dans le cas précédent de variation de $\nu = \nu(T)$.

On appelle β(ou $\frac{\partial\nu}{\partial T}$, etc.) le paramètre de dissymétrie ou "non-Boussinesq en effet l'approximation d'Oberbeck-Boussinesq (voir ch. 4.1) considère tous les paramètres physiques constants (sauf la variation linéaire de la densité dans le terme de force). Notons que dans les analyses théoriques de faibles dissymétries cette approximation est maintenue car, d'habitude [4][70], le paramètre β est seulement un paramètre de développement des solutions.

En revenant au potentiel Φ et en suivant la même analyse qu'en 3.3, la présence des termes impairs conduit à des transitions avec un saut fini (du genre transition du 1er ordre) et hystérésis (instabilité sous-critique). Ce premier aspect a été observé, mais le domaine de cette hystérésis est trop étroit [58] pour être bien défini (voir fig. 4 de la publication).

8.2. *Structure convective : hexagones.*

Comme dans la plupart des cas correspondant à ce type de dissymétrie, la structure hexagonale est favorisée.

En général, la naissance du mouvement convectif ayant lieu dans une des deux couches horizontales, fait apparaitre un ensemble de points source, bien localisés dans un plan (en z).

Une bonne condition d'empilement compact à deux dimensions est la symétrie hexagonale [57] . Il en résulte par continuité du mouvement du fluide, la fermeture des lignes de courant le long des six parois verticales d'une cellule convective hexagonale (hexagones de Bénard) (fig. Iii ch. 3).

En général il n'est pas facile de déterminer le type de structure cellulaire si on mesure seulement une composante de vitesse surtout quand la boite convective ne contient qu'un petit nombre de cellules. Le fait de pouvoir trouver des coupes $v_z = f(x)$ le long desquelles la vitesse verticale est partout de même signe (et non nulle) (voir fig.2a) permet d'identifier la présence d'une structure hexagonale parmi les autres structures polygonales possibles [71].

Ce modèle phénoménologique (de potentiel) a une équation de Landau associée. Comme la structure hexagonale correspond à l'existence de trois vecteurs d'onde $\vec{k_i}$ à un angle de $\pi/3$ mais de même module, une seule équation pour la valeur maximale d'une composante de vitesse (amplitude) sera suffisante [56].

En ne considérant que le cas homogène ($\partial_{x_i} = 0$)

$$\tau_o \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} = \varepsilon \tilde{V} + b\tilde{V}^2 - \frac{\alpha \tilde{V}^3}{V_o^2} \qquad (\alpha/V_o^2 = c)$$

où le terme $b\tilde{V}^2$ provient du caractère dissymétrique, tel que $b = f(\beta)$ ($b = 0$ si $\beta = 0$). Pour le cas stationnaire, l'équation correspond à la

courbe de bifurcation sous-critique (fig.2).

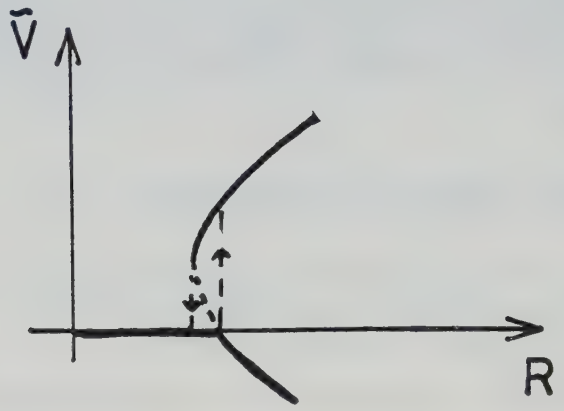


Figure 2

Pour des nombres de Rayleigh plus élevés une transition vers des rouleaux existe, qui correspond, en termes du potentiel Φ , à ce que les valeurs de $\Phi_{\tilde{V}*}$ (rouleaux) = $\Phi_{\tilde{V}*}$(hexagones) (Φ rouleaux est sans termes en $\tilde{V}^3$). C'est à cette valeur de $\tilde{V}*$ que se croisent les deux courbes de bifurcation.

PUBLICATION V

Classification
Physics Abstracts
44.25 — 47.25Q

NON BOUSSINESQ CONVECTIVE STRUCTURES IN WATER NEAR 4 °C

M. DUBOIS, P. BERGE and J. WESFREID

DPh-G/PSRM, CEN Saclay, B.P. n° 2, 91190 Gif sur Yvette, France

(*Reçu le 7 juillet 1978, accepté le 29 août 1978*)

Résumé. — Des mesures de vitesse locale effectuées dans une couche d'eau en convection au voisinage de 4 °C sont présentées. La répartition non linéaire de la densité de l'eau produit des effets convectifs qualitativement différents de ceux que l'on observe dans le cas des fluides répondant à l'approximation de Boussinesq. On trouve en particulier des structures convectives hexagonales près du seuil critique, structures qui apparaissent par une bifurcation anormale. Ces hexagones se transforment à plus haut nombre de Rayleigh en rouleaux dissymétriques, cette transformation étant réversible mais s'accompagnant d'une hystérésis importante. L'ensemble des comportements observés est cohérent avec la brisure de symétrie des propriétés de la couche.

Abstract. — The convective properties of a water layer near 4 °C have been examined by means of local velocity measurements. The non linear density profile of such a layer produces qualitatively different behaviour from that observed in « Boussinesq » fluids. In particular a hexagonal dissipative structure is observed corresponding to an abnormal bifurcation near the threshold ; at higher Rayleigh numbers, these hexagons transform into asymmetric two-dimensional rolls. The measured velocity field is in agreement with that expected from the breakdown in the symmetry properties of the water layer.

1. **Introduction.** — It is well known that the preferred dissipative structure for a « Boussinesq » fluid near its Rayleigh-Bénard instability threshold consists of two-dimensional rolls (see for example the references in [1] and [2]). Let us recall that the Rayleigh-Bénard instability is related to the buoyancy driven motion in a layer of a pure fluid confined between two horizontal conducting rigid plates ; the horizontal extension of this layer is supposed to be much greater than its depth d. Under such conditions, if the temperature difference ΔT across the layer is higher than a critical value (the lower plate being at the higher temperature), ordered convective motion takes place in the layer. More precisely, the properties of this layer are described by the Rayleigh number

$$R = \frac{g\alpha\,\Delta T d^3}{\nu D_T} \qquad (1)$$

where g is the gravitational acceleration, and α, ν and D_T are respectively the volume expansion coefficient, the kinematic viscosity and the thermal diffusivity of the fluid. The critical threshold of instability is $R_c = 1\,707$ in infinite geometry. The Boussinesq assumption consists in neglecting the temperature variation of the physical properties of the fluid, except for that of the density. Under such conditions, the properties of the unstable layer are symmetric with respect to the mid-plane of the layer : local velocity measurements [2] as well as temperature measurements [3], [4] show a perfect symmetry between the downward and upward motion. Then, in the mid-plane of the cell, the vertical velocity component V_Z obeys the relation (near the threshold)

$$V_Z = \hat{V}_Z \cos\frac{2\pi X}{\Lambda_c}$$

where X is the coordinate along the greatest extension of the cell, perpendicular to the axis of the rolls and Λ_c is the wavelength of the preferred mode. Near the threshold $\Lambda_c \sim 2\,d$.

The equiprobability of having either $+V$ or $-V$ at any point in the fluid is characteristic of a normal bifurcation. The main consequence of such a behaviour is a striking similarity between some properties of the Rayleigh-Bénard instability and those of second order phase transitions [5].

Non Boussinesq case. — If the physical properties of the convective fluid vary strongly with temperature, or more generally, if they are different at the bottom and at the top boundaries, we may expect an asymmetry between the upward and downward motion. The first example of such a flow is given by the hexagonal pattern of Bénard's experiments [6]. In the case of rigid-rigid horizontal boundaries, such an hexagonal pattern has been predicted in [7] and [8] in relation with the variation of the physical properties of the fluid in the layer and has been observed in fluids with high viscosity variations [9], [10], [11].

If we consider the properties of water near 4 °C, where the coefficient of volume expansion varies from zero to finite values, we also expect to have an asymmetric dissipative structure. The aim of the work reported here is to study this convective structure in a layer of water, where the isotherm 4 °C is applied to the top boundary, the bottom plate being at a higher temperature. In this geometry, the buoyancy forces which are driving the instability are greater at the bottom plate and we may expect to have upward motion with a greater amplitude than that of the downward flow leading to an asymmetric dissipative structure (div $\rho V = 0$).

2. **Experimental arrangement.** — The cell, which contains the water, has already been described [12]. It is rectangular with horizontal extension $18 \times 7.5\ \text{cm}^2$ and is 1 cm high. The top and bottom plates which confine horizontally the water layer are thermally regulated by circulating water from cooled thermostatic baths. The over-all thermal precision is $\pm 5 \times 10^{-2}$ °C. The water is confined laterally by a plexiglass rectangular frame through which all optical measurements are made. In all the results reported in this paper, the top plate temperature is kept at 4.15 °C.

The convective structure was studied by local velocity measurements, in particular the vertical velocity component V_Z. This component was measured in the mid-height-plane of the layer by a laser-Doppler anemometer which works according to the real fringe mode. The signal from the photomultiplier is processed by a real time Fourier analyser. The measurement volume is approximately :

$$\delta X \times \delta Z \times \delta Y = 0.15 \times 0.15 \times 1.3\ \text{mm}^3 .$$

$Z'Z$ is the vertical axis ; $X'X$ and $Y'Y$ are the horizontal ones, respectively parallel to the greatest and the shortest side of the cell.

3. **Experimental results.** — 3.1 CONVECTION THRESHOLD. — The threshold of the convective motion is evidenced by the appearance of measurable velocities in the water layer. The top plate being at 4.15 °C, the corresponding ΔT_c is 1.94 ± 0.05 °C. If we calculate the corresponding Rayleigh number as

$$R = \frac{g d^3}{\nu D_T}\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right) \qquad (2)$$

where $\Delta\rho$ is the density difference between the bottom and top plates, we obtain $R_c = 1\,660 \pm 120$. The relation giving the variation of ρ with the temperature T is, near 4 °C :

$$\rho \simeq \rho_0[1 - \beta(T - T_{max})^2] .$$

with $\beta = 8.1 \times 10^{-6}$ and $T_{max} = 3.98$ °C.

At $T = 5$ °C

$$D_T = 1.37 \times 10^{-3}\ \text{cm}^2\ \text{s}^{-1}$$

and

$$\nu = 1.519 \times 10^{-2}\ \text{cm}^2\ \text{s}^{-1} \quad (P = 11.1) .$$

In the limit of our experimental accuracy, we see that the critical Rayleigh number is nearly the same as in the Boussinesq case. Moreover this result is in agreement with the calculated and experimentally observed value given in [13], and is of the same order of magnitude as that mentioned in [14]. We must note also that we do not observe — within the limits of the accuracy of our thermal regulation — any hysteresis phenomenon in the value of ΔT_c, that is to say, if this hysteresis exists, it does not exceed a few percent around the observed value.

3.2 CONVECTIVE STRUCTURE. — 3.2.1 *Hexagonal pattern.* — For temperature differences ΔT slightly above ΔT_c, we obtain a structure whose velocity field is represented on figure 1. This picture gives

FIG. 1. — Picture of the tridimensional pattern representating the experimental variation of the vertical velocity V_Z (measured at the mid-height of the layer) as a function of the coordinates X and Y in the case of hexagonal structures. The dark areas represent ascending motion.

the spatial variation of the V_Z component, measured in the mid-plane of the cell, where V_Z is maximized *versus* Z. We can see that this tridimensional structure consists of regions with downward velocities which surround smaller regions of higher upward velocities.

Such an arrangement is typical of a hexagonal pattern.

We compared the spatial variation of the V_z amplitude as measured, with that calculated from the expected dependence for a hexagonal structure [15].

$$V_z = \frac{1}{3}\tilde{V}_z\left[4\cos\left[\frac{a}{4}(\sqrt{3}\,x + y)\right] \times \cos\left[\frac{a}{4}(\sqrt{3}\,x - y)\right] \times \cos\frac{a}{2}y - 1\right]$$

$a = 4\,\pi d/3\,L$ is the dimensionless wavenumber of the structure, L is the length of a side of a hexagon, and $\tilde{V}_z$ is the maximum vertical velocity amplitude located in the centre of a hexagon which is taken here as the origin of the axes. In our experimental geometry the X and Y axes of the hexagonal pattern are found parallel to $X'X$ and $Y'Y$ axes of the cell.

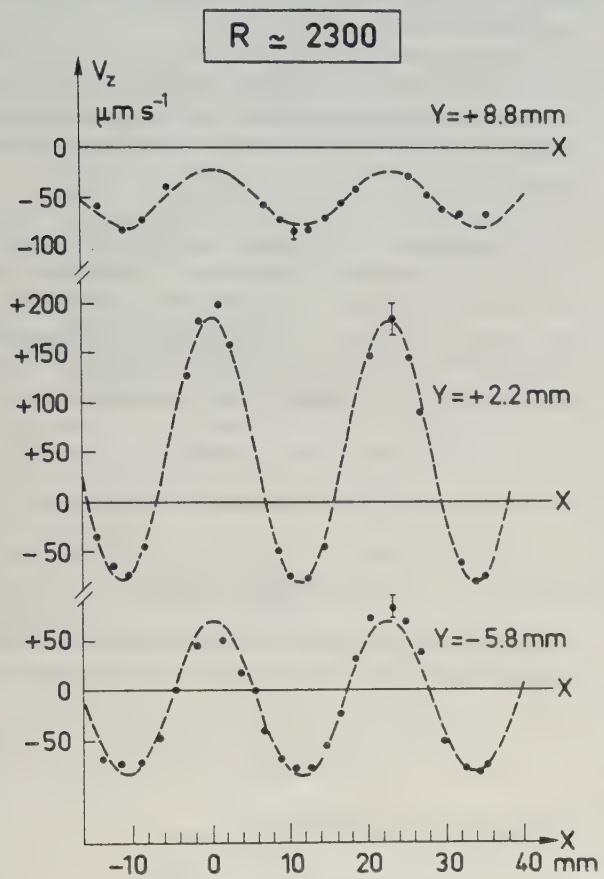


FIG. 2. — $V_z = f(X)$ characteristics for different Y values in hexagonal structure — the dashed line represents the computer best fit with the theoretical velocity profiles expected for hexagons. The origin $X = 0$, $Y = 0$ is taken at the centre of a hexagon, the X axis is nearly parallel to a line joining the centres of two adjacent hexagons. Positive value of V_z corresponds to ascending motion.

The results, as shown on figure 2, well demonstrate the presence of a hexagonal structure in the water convective layer, here at $R = 2\,310$. The best fit between measured and calculated values gives

$$\Lambda_x = \sqrt{3}\,L = 22.5 \pm 1 \text{ mm}$$

which corresponds to $a = 3.22 \pm 0.1$ near to the critical value $a_c = 3.117$ [15]. Though all the results are *very* consistent with the presence of hexagons, we have to note that a slight deformation of the pure hexagonal pattern probably occurs due to the influence of boundaries ; indeed, the hexagons are only regular in the central part of the cell.

3.2.2 *Asymmetric rolls.* — As ΔT is increased, at a definite value ΔT_1 the hexagonal pattern is transformed into two-dimensional asymmetric rolls, with a wavelength nearly $\Lambda_c = 2\,d$. A typical velocity field of this structure is shown on figure 3, where V_z is independent of Y. We can note that, as for the case of hexagons, the maximum ascending velocity has always a greater amplitude than the descending velocity.

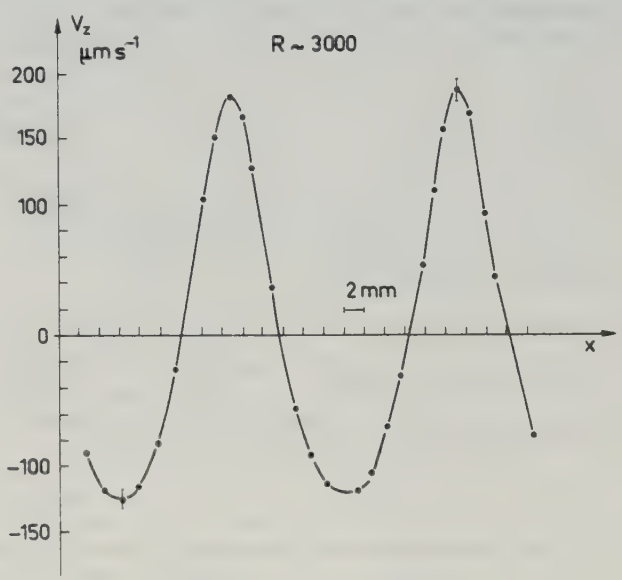


FIG. 3. — Typical characteristic $V_z = f(X)$ for two dimensional roll structure. The roll axis is along the Y axis, parallel to the short side of the cell.

These two types of structure, hexagons and asymmetric rolls, can be well understood if we consider the actual mechanism of the buoyancy driven convection. As explained before, the stimulation of the motion is greater at the lower horizontal boundary. So our mechanism is similar to that observed by Atten and Lacroix [16] in electrohydrodynamics instabilities, and to that observed by Krishnamurti [17] who observed instabilities in a layer submitted to a non linear temperature gradient. Note furthermore that numerical calculations, performed by Moore and Weiss [18] on two-dimensional structures in water near 4 °C predict the presence of asymmetric ascending and descending flow.

3.3 DEPENDENCE ON R. — We have studied the experimental domain of stability of the hexagonal pattern ; then, we measured the variation of the vertical velocity amplitude with R, in the two types

of structure (hexagons and asymmetric rolls). We recall again that in all our measurements, the top plate was maintained at 4.15 °C ± 0.03 °C, and all the structures we studied, correspond to the equilibrium state, ΔT being maintained constant during many hours.

3.3.1 *Hexagonal pattern.* — The hexagonal structure which appears at the threshold of the convective state is stable in a small range of Rayleigh numbers : when we increase ΔT, then R, at $R_2 \simeq 2\,500 \pm 100$ the hexagonal pattern transforms into two-dimensional rolls. Beyond this R_2 value, only the rolls are stable ; then, by decreasing ΔT, the hexagonal structure reappears only at $R_1 = 1\,900 \pm 50$ showing, indeed, a notable hysteresis in the transformation rolls ⇆ hexagons.

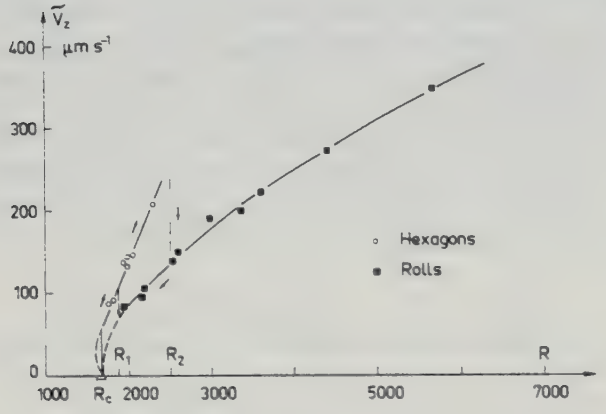


FIG. 4. — Behaviour of the maximum velocity amplitude, $\tilde{V}_z$, *versus* Rayleigh number for hexagons and rolls.

This phenomenon is illustrated on figure 4 in which we have reported the $\tilde{V}_z$ maximum amplitude of the ascending flow in the two types of structures.

Considering first the dependence of the velocity amplitude in the hexagonal pattern, two remarks can be made :

a) at R_c, the convective velocity seems to jump discontinuously from zero to a definite value $\tilde{V}_0$ ($\simeq 50\ \mu m\ s^{-1}$) ;

b) from this value, the amplitude approximately grows as $(R - R_c)$ according to an empirical law

$$\tilde{V}_z = \left[50 + 450\left(\frac{R - R_c}{R_c}\right)\right] \mu m\ s^{-1}$$

which describes the observed behaviour very near the threshold to within a 10 % accuracy.

3.3.2 *Roll pattern.* — The asymmetric rolls structure has been studied in the range $1\,900 < R < 8\,300$. These rolls are strictly two-dimensional and parallel to Y, that is to say parallel to the short edge of the frame. The asymmetry V_+/V_-, that is the ratio of the maximum amplitude of the ascending and descending motion V_+ and V_- is approximately constant in all of the domain studied, remaining equal to $V_+/V_- = 1.4 \pm 0.1$.

The wavelength Λ, nearly equal to 2 d slightly above the threshold, increases to $\Lambda = 2.35\ d$ at $R_a = 8\,300$. This wavelength variation exhibits hysteresis and time dependence.

From our measurements we have calculated the amplitude $\tilde{V}_Z$ of the fundamental Fourier mode which would give the same mean mass flux as that measured. $\tilde{V}_Z$ varies as

$$\tilde{V}_Z = \tilde{V}_Z^*\left(\frac{R - R_c}{R_c}\right)^{0.49 \pm 0.02}$$

with $\tilde{V}_Z^* = 168\ \mu m\ s^{-1}$, and $R_c \simeq 1\,660$.

Let us note that this power law dependence is the same as that found for Boussinesq conditions, despite the asymmetry of corresponding rolls. Moreover, the value of $\tilde{V}_Z^*$ is in perfect agreement with that calculated in [19] and measured in high Prandtl number fluids [2].

It is also interesting to remark the striking difference of the velocity behaviour with R, for the case of the roll arrangement and for the hexagonal pattern, results which are in agreement with Veronis calculations [21].

4. **Discussion.** — All these results are consistent with the asymmetric properties of a water layer near 4 °C. In particular, in the hexagonal pattern, the non-equivalence of the ascending and descending velocities, leads to a phenomenological Landau equation [19], [5], [20], to which we must add a $\tilde{V}^2$ term such as

$$\tau_0 \frac{d\tilde{V}}{dt} = \tilde{V}\varepsilon + b\tilde{V}^2 - c\tilde{V}^3 \qquad (3)$$

where τ_0 is a characteristic time and $\varepsilon = \dfrac{R - R_c}{R_c}$.

We are in the presence of an abnormal bifurcation. In the stationary state, the solution of this equation is

$$\tilde{V} = \frac{b}{2c} \pm \frac{b}{2c}\left[1 + 4\frac{c}{b^2}\varepsilon\right]^{1/2} \qquad (4)$$

which gives for low values of ε

$$\tilde{V} - \frac{\tilde{V}_0}{2} = \pm\frac{\tilde{V}_0}{2}\left[1 + 2\frac{\tilde{V}_1}{\tilde{V}_0}\varepsilon + \cdots\right] \qquad (5)$$

$\tilde{V}_0$ is the value of the velocity jump at $R = R_c$ and $\tilde{V}_1$ is the extrapolated value at $\varepsilon = 1$ of the velocity behaviour $\tilde{V}_Z - \tilde{V}_0 = f(R)$ measured at low values of ε.

With such a description, we expect to have an hysteresis phenomenon for the threshold R_c, that is to say the established convection is expected to disappear at a value $R' < R_c$ (or at a ε' negative value). The calculation gives $\varepsilon' = -\tilde{V}_0/4\,\tilde{V}_1$, the value

of which equals − 0.028 according to our experimental results (or $R' = 1\,610$). This value is within our experimental accuracy in the R_c determination. Let us note finally that equation (5) predicts that, immediately after the jump, V increases as ε, as observed. The hysteresis of the transformation hexagons ⇆ rolls, has been predicted in [7] and [8] and observed in [9], [10] and [11] in the case of non-Boussinesq conditions. But the comparison with our experiment is not obvious; for, if we take into account only the variation of the physical constants of the water between the lower and upper plates, the corresponding domain of stability of the hexagonal pattern would be very narrow and not experimentally observable.

So, it would be necessary to perform complete calculations in the specific case of the water volume expansion anomaly. Therefore, our experimental results seem to confirm the fact that the non-linearities are more efficient for the stability of the hexagonal pattern in agreement with the results given by Krishnamurti [17].

In conclusion, we observed and studied the velocity behaviour of non-Boussinesq convective structures — hexagons and asymmetric rolls — in a water layer at 4 °C. As far as we know it is the first time that such a behaviour has been observed in water. The existence of the non-Boussinesq structure as well as the thermal behaviour of the amplitude of convective motion are in agreement with the breakdown of the symmetrical behaviour between ascending and descending velocities due to the non-linear density profile in the water layer.

Acknowledgments. — We wish to thank P. Atten and E. Hopfinger for helpful advice and stimulating discussions.

References

[1] Davis, S. H., *J. Fluid Mech.* **30** (1967), 465.
Davis, S. H., *J. Fluid Mech.* **32** (1968) 619.
Stork, K. and Müller, U., *J. Fluid Mech.* **54** (1972) 599.
[2] Dubois, M. and Bergé, P., *J. Fluid Mech.* **85** (1978) 641.
[3] Farhadieh, R. and Tankin, R. S., *J. Fluid Mech.* **66** (1974) 739.
[4] Oertel, H. and Bühler, K., *Int. J. Mass Heat Transfer* **21** (1978) 1111.
[5] Wesfreid, J., Pomeau, Y., Dubois, M., Normand, C. and Bergé, P., *J. Physique* **39** (1978) 725.
[6] Bénard, H., *Res. Gen. Sci. Pures Appl.* **11** (1900) 1161.
[7] Busse, F. H., *J. Fluid Mech.* **30** (1967) 625.
[8] Palm, E., Ellingsen, T. and Gjévik, B., *J. Fluid Mech.* **30** (1967) 651.
[9] Somerscales, E. and Dougherty, T. S., *J. Fluid Mech.* **42** (1970) 755.
[10] Whitehead, J. A., *Fluctuations, Instabilities and Phase Transitions*, Nato Advanced Study Instituts (Plenum Press) 1975, Vol. **B 11**, p. 153.
[11] Hoard, C., Robertson, C. and Acrivos, A., *Int. J. Heat Mass Transfer* **13** (1970) 849.
[12] Bergé, P., *Fluctuations, Instabilities and Phase Transitions*. Nato Advanced Study Instituts (Plenum Press) 1975, Vol. **B 11** p. 323.
[13] Zu-Shung Sun, Chi-Tien and Yin-Chao Yen, *Aiche J.*, **15** (1969) 910.
[14] Legros, J. C., Longree, D. and Thomaes, G., *Physica* **72** (1974) 410.
[15] Chandrasekhar, S., *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Oxford University Press, London) 1961.
[16] Atten, P. and Lacroix, J. C., Submitted to *J. Méc.* (1978).
[17] Krishnamurti, R., *J. Fluid Mech.* **33** (1968) 445 and 447.
[18] Moore, D. R. and Weiss, N. O., *J. Fluid Mech.* **61** (1973) 553.
[19] Normand, C., Pomeau, Y., Velarde, M. G., *Rev. Mod. Phys.* **49** (1977) 581.
[20] Haken, H., *Rev. Mod. Phys.* **47** (1975) 67.
[21] Veronis, G., *Astrophys. J.* **137** (1963) 641.

CHAPITRE 9

DIFFUSION DE LA PHASE

Une description plus complète des structures en rouleaux doit tenir compte (en plus de l'amplitude) de la phase qui exprime la position et certaines des caractéristiques géométriques de cette structure convective. Dans ce chapitre nous décrivons les propriétés de la dynamique de cette variable de phase ainsi que la première expérience qui a vérifié son caractère diffusif.

9.1. *Variable de phase, description des perturbations*

On peut exprimer une composante de vitesse (par exemple v_z), au voisinage du seuil de convection, sous la forme générale :

$$v_z = \tilde{V} \sin [qx + \varphi(x,y,t)] \quad \text{où} \quad v_z = v_z(x,y,z = d/2)$$

et φ est la variable de phase.

La situation où φ est constant correspond au cas de rouleaux parallèles, sans déformations et dans ce cas, φ donne seulement une référence de position.

La variation de la phase φ en fonction de la coordonnée longitudinale x, $\varphi = \varphi(x)$, se rapporte à l'existence de rouleaux cylindriques parallèles avec des variations dans leur taille. C'est le cas de compression et dilatation de la structure, qui est décrite dans la publication VI, ou dans le cas où des modulations de la phase ont été induites par marquage thermique [59][60], parallèle aux axes des rouleaux (Fig.1). La modification du nombre d'onde $\delta q = q - q_o$ au voisinage du nombre d'onde critique q_o est aussi liée à une variation de la phase $\varphi = \varphi(x) = \delta q\, x$.

La variation de la phase φ en fonction de la coordonnée transversale y, $\varphi = \varphi(y)$, correspond à des ondulations de l'axe des rouleaux telle que celle, par exemple, de l'ondulation qui conduit à l'instabilité zig-zag (Fig.2).

Dans le cas plus général de déformations des rouleaux, φ est une fonction continue de la position. Pour des faibles perturbations de φ, on peut même utiliser cette variable pour la description géométrique de l'angle de déviation par rapport à son axe non perturbé, car l'angle $\theta \simeq \frac{1}{q} \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y}$, (Fig.3).

Notons que dans un système de rouleaux bidimensionnels une ondulation entraine l'apparition d'une composante δv_y de vitesse, telle que $v_y \simeq \frac{\partial \varphi}{\partial y} v_x^o$. (Fig.3)

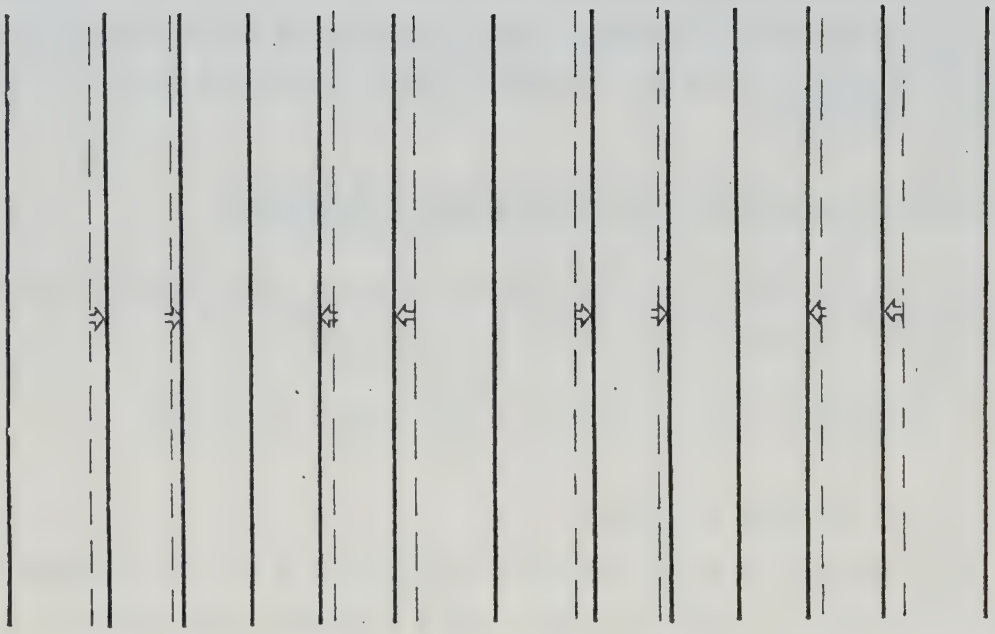


Figure 1

Cette composante V_y entraine la présence de vorticité verticale ω_z, absente dans la structure non perturbée.

Un dernier exemple sur l'application de la variable de phase φ correspond à l'existence de défauts topologiques dans la structure convective (Fig.4).

Autour du coeur d'une dislocation (où il y a une source et un puits) on a une variation discontinue de la phase φ , conduisant à un saut de phase de 2π. Loin du coeur, on aura un champ de déformation de la structure [61][62] donné par $\varphi = \varphi(x,y)$, et éventuellement à cause du mouvement de défaut [63] [64] on aura une variation temporelle de φ . Le vecteur Burgers $\vec{b}$ associé est lié à la circulation du gradient de la phase autour de la dislocation :

$$\frac{1}{q_o} \oint \vec{\nabla\varphi}.d\vec{\ell} = \pm|\vec{b}| \neq 0.$$

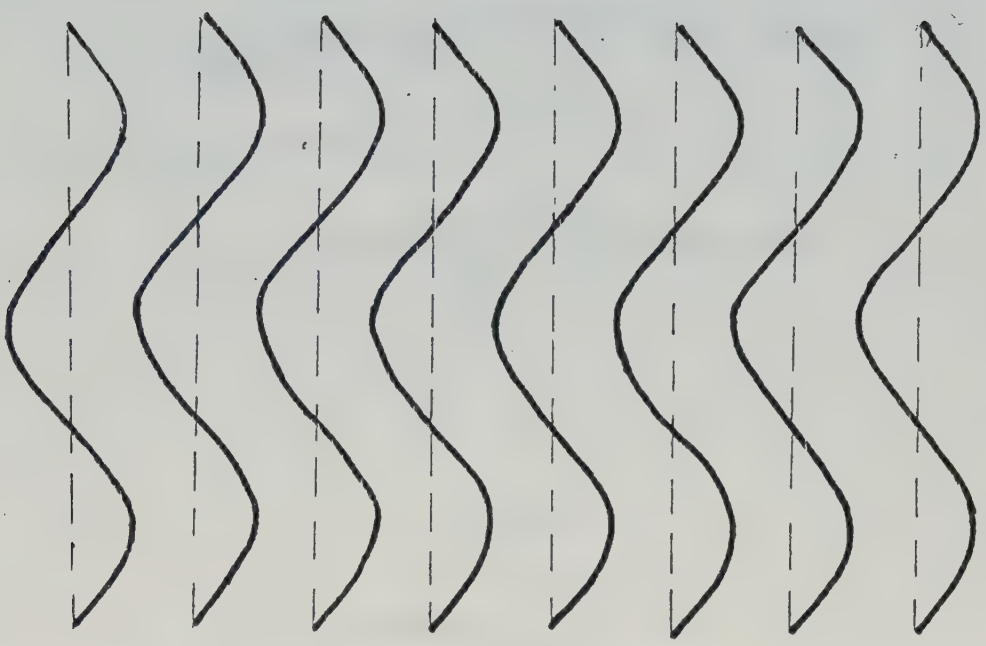


Figure 2

9.2. *Diffusion de la phase*

Pomeau et Manneville [38] ont proposé une équation de diffusion pour le comportement dynamique de la variable de phase $\varphi = \varphi(x,y,t)$; pour un système de rouleaux soumis à des variations spatiales de φ lentes devant la longueur d'onde Λ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = D_{//} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + D_{\perp} \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \qquad (1)$$

où
$$D_{//} = \frac{\xi_o^2}{\tau_o} \cdot \left(\frac{\varepsilon - 3\xi_o^2 (q - q_c)^2}{\varepsilon - \xi_o^2 (q - q_c)^2} \right) \qquad (2)$$

et
$$D_{\perp} = \frac{\xi_o^2}{\tau_o} \cdot \left(\frac{(q - q_c)}{q_c} + O(\varepsilon^n) \right) \qquad (3)$$

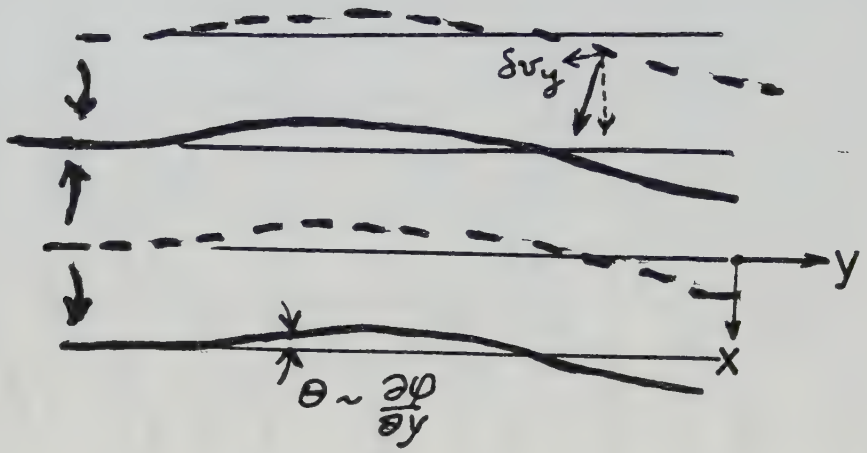


Figure 3

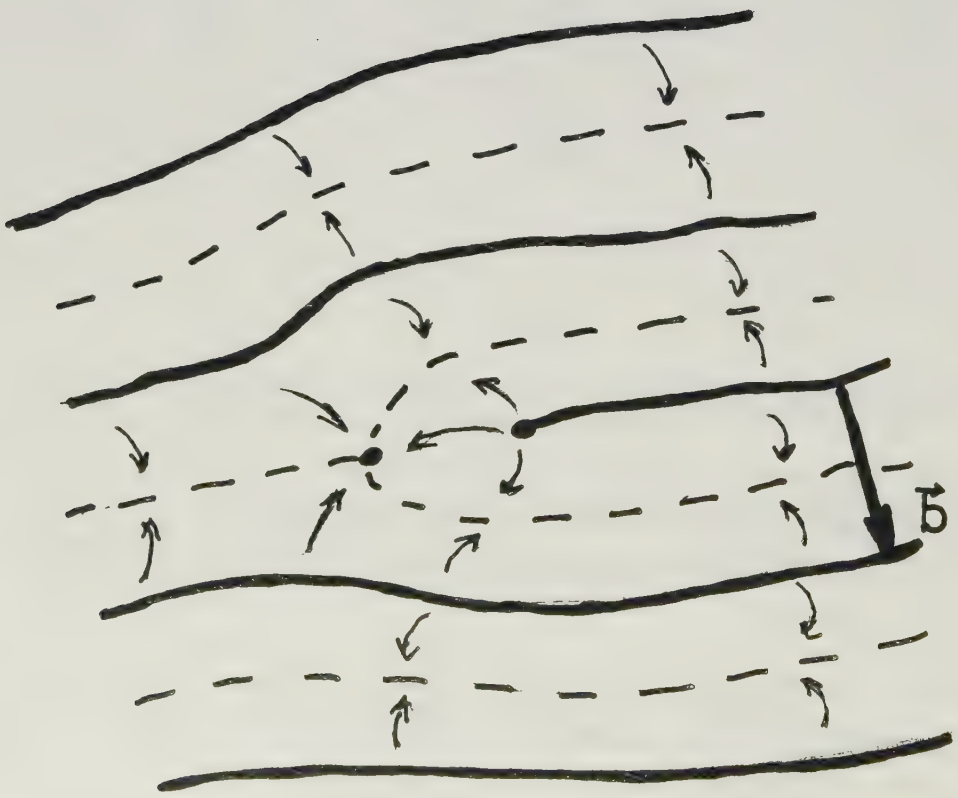


Figure 4

Le quotient $\xi_o^2/\tau_o = \frac{0.148(38.44P)}{1+1.95\ P}\ .\kappa$ devient, pour le nombre de Prandtl $\to \infty$: $\xi_o^2/\tau_o\big|_{P\to\infty} = 2.9\ \kappa$ et pour Prandtl $\to 0$: $\xi_o^2/\tau_o\big|_{P\to\infty} = 5.70\ \nu$.

Cette équation de relaxation correspond à un pseudo-potentiel pour la fluctuation de phase, au voisinage du seuil

$$\Phi \sim \iint dxdy \left[\frac{D_{//}}{2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{D_{\perp}}{2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + NL \right]$$

où NL correspond à des termes en $\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}\right)^2$, qu'on discutera après.

On peut faire une analogie entre les variations de phase φ et les déplacements u_i ($u_i \leftrightarrow \varphi/q$) des atomes dans un cristal (ou des couches d'un cristal liquide smectique[61,65]). Dans cette analogie les coefficients de diffusion D_i seraient proportionnels aux coéfficients élastiques du type des coefficients de Lamé.

Néanmoins une différence significative existe car, dans le phénomène convectif, on est en présence de mécanismes stabilisants diffusifs, qui conduisent à une équation de diffusion (relaxation) au lieu du phénomène propagatif (ondes) dans le cas élastique.

Remarque : Nous nous bornons ici au cas de fluide de haut nombre de Prandtl, car pour $P \to 0$ des instabilités oscillatoires ne peuvent pas être interprétées dans le cadre de ce modèle de relaxation .

En revenant à l'équation (1) on peut l'analyser en fonction des modes de Fourier Laplace qui correspondent à des perturbations pures du type compression (dilatation) : $\varphi = \varphi(x) \sim e^{i(\omega t - k_x x)}$ (voir Fig.1 où $k_x = 0.3q$), ou de type ondulation : $\varphi = \varphi(y) \sim e^{i(\omega t - k_y y)}$ (voir Fig.2 où $k_y = 0.5q$).

Pour les premières (modes longitudinaux), la relation de dispersion est

$$i\omega = -D_{//}\ k_x^2 \qquad (4)$$

Pour les modes transversaux d'ondulation, la relation de dispersion est

$$i\omega = -D_{\perp}\ k_y^2 \qquad (5)$$

La publication VI détaille la première vérification expérimentale de la relation (4) et la mesure du coefficient $D_{//}$. Nous avons étudié la pénétration et le déphasage des fluctuations de phase en introduisant une perturbation cyclique et localisée d'amplitude sur un système de rouleaux : cette perturbation introduit une modulation temporelle de la phase dans le système de rouleaux. Cette perturbation correspond à une fréquence ω réelle donnée, pour laquelle -d'après (4)- on mesure le vecteur d'onde complexe

$$k_x = m_1 + im_2 = \sqrt{\frac{\omega}{D_{//}}}\ \sqrt{-i} = \sqrt{\frac{\omega}{2D_{//}}}\ (1 - i)$$

La partie $m_1 = \sqrt{\frac{\omega}{2D_{//}}}$ correspond au "déphasage" de la phase $\sim e^{im_1 x}$ et $m_2 = \sqrt{\frac{\omega}{2D_{//}}}$ correspond à la pénétration qui s'amortit comme $\sim e^{-m_2 x}$.
La procédure de réalisation de cette expérience est comparable à celle de la mesure du coefficient de diffusion thermique dans une barre chauffée alternativement à une de ses extrèmités et pour laquelle on fait des mesures d'amortissement spatial de la perturbation de température et du "retard" entre le signal inducteur et la réponse de variation de température (déphasage).

La valeur mesurée de $D_{//} = (3.5 \pm 1) \times 10^{-3}$ cm^2/sec correspond bien à la valeur de ξ_o^2/τ_o, car le facteur $(\varepsilon - 3\xi_o^2\delta q^2)/(\varepsilon - \xi_o^2\delta q^2) \simeq 1$ pour des vecteurs d'onde de la structure en rouleaux voisins de q_c, comme c'est le cas pour une structure naissant spontanément et à des nombres de Rayleigh légèrement surcritiques.

Ceci correspond à des valeurs de coefficients de diffusion assez voisins du coefficient de diffusion de la température (cas du grand nombre de Prandtl), car $D_{//} \simeq \xi_o^2/\tau_o = (2.92 - 0.51\ P^{-1})\kappa \sim 10^{-3}$ cm^2/s. (Les perturbations longitudinales de phase relaxent un peu plus vite que celles de température).

Notons que dans l'expérience décrite dans le publication VI on a spécialement axé les mesures pour vérifier le caractère diffusif de la dynamique de phase. Des expériences faites ultérieurement à Saclay [59-60] ont permis de tester aussi les deux relations (4) et (5). On impose, par marquage thermique [66], une structure donnée avec une modulation de phase de type longitudinal ou transversal de mode spatial k_i ($k < q$ pour maintenir la condition de variation lente de la phase -"region hydrodynamique"). Le temps de relaxation de phase $\tau_r = (D_i k_i^2)^{-i}$ a été mesuré, à partir de mesures de vitesses.

Les différents nombres d'onde de la structure modifient les coefficients de diffusion $D_i = f(q)$. Ainsi le coefficient $D_\perp \simeq \frac{\xi_o^2}{\tau_o} \cdot \frac{\delta q}{q_o}$ au voisinage du seuil change fortement avec q. ($\delta q = q - q_c$).

9.3. *Stabilité*

Les analyses non-linéaires de stabilité restreignent la région donnée par la courbe de stabilité linéaire marginale $R_o = R(q)$. Différents mécanismes d'instabilités peuvent avoir lieu en fonction du nombre de Rayleigh[4][16] et du vecteur d'onde de la structure. Il y a deux instabilités qui peuvent être étudiées en fonction de cette analyse de faibles perturbations de phase et être reliées aux coefficients de diffusion de phase pour son instabilité.

Le coefficient $D_{//}$ mesure la stabilité du système vis à vis des compressions ou dilatations et devient négatif pour $\frac{\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{3}\xi_o} < |q - q_c| < \frac{\varepsilon^{1/2}}{\xi_o}$, donc des perturbations doivent croître exponentiellement avec le temps . La limite supérieure pour $|\delta q|$ est la limite conductive ou courbe de stabilité marginale (approximation parabolique) et la limite inférieure délimite la région de stabilité non-linéaire vis-à-vis des perturbations bidimensionnelles ($v_y = 0$). Ceci correspond à l'instabilité d'Eckhaus .

Le caractère strictement bidimensionnel de cette instabilité rend difficile son observation du fait de l'existence de perturbations tridimensionnelles (influence des parois, etc..) qui excitent d'autres instabilités En particulier, pour des fluides de nombre de Prandtl infini, l'instabilité de "rouleaux croisés" se produit avant. Cette instabilité conduit à un système de rouleaux perpendiculaires aux rouleaux primaires, de vecteur d'onde plus proche de q_c. La courbe de stabilité marginale pour l'instabilité de "rouleaux croisés" a une courbure un peu plus faible que celle de l'instabilité d'Eckhaus ($D_{//} = 0$). Pour le cas de conditions horizontales libre-libre : $|q - q_c| = \varepsilon^{1/2}/\sqrt{3}\xi_o$ pour l'instabilité d'Eckhauss et $|q - q_c| = \varepsilon^{1/2}/\sqrt{4.5}\xi_o$ pour celle des rouleaux croisés. Dans le cas rigide-rigide, pour un nombre de Prandtl $P \leq 1{,}1$, l'instabilité d'Eckhaus précédé celle des rouleaux croisés[67].

Le coefficient $D_\perp$ exprime la stabilité des rouleaux vis à vis des ondulations. A l'ordre le plus bas, le coefficient $D_\perp$ est égal à : $\xi_o^2/\tau_o . \delta q/q$; il devient négatif pour $q < q_c$, conduisant à une amplification des perturbations d'ondulations de grande longueur d'onde ($k < q$). Des états finaux avec rouleaux à 45° ont été observés [4], d'où leur nom de "zig-zag".

Notons que $D_{//} >> D_{\perp}$ pour $q \sim q_c$; la structure revient vite à la position initiale en ce qui concerne les excitations longitudinales (parallèles).

Remarques : *i*) La ligne $D_{\perp} = 0$, ou limite pour l'instabilité zig-zag, a un départ "vertical" au point (R_c, q_c), en tournant légèrement vers la région $q < q_c$, dans la figure 5. Un terme de correction à $\delta q/q$ doit être ajouté, en fonction du problème particulier.

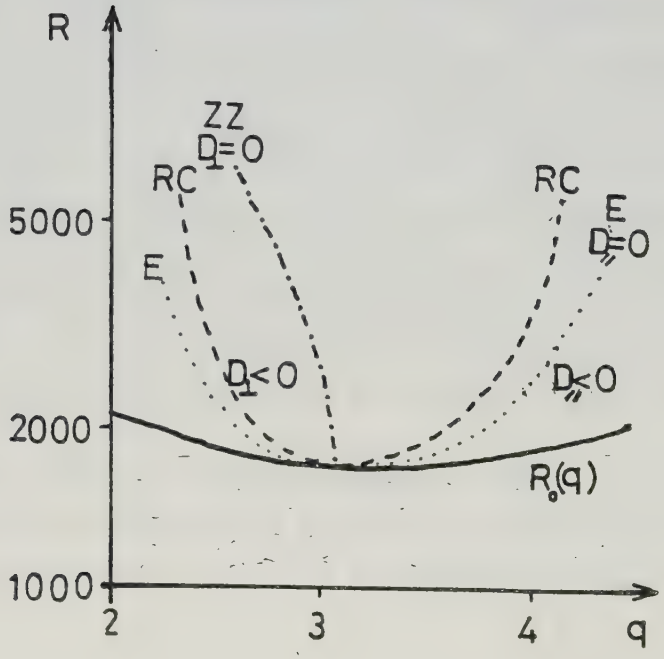


Figure 5

Ainsi pour le cas libre-libre ($P \to \infty$) ou pour la convection dans les milieux poreux

$$D_{\perp} = \frac{\xi_o^2}{\tau_o} \left(\frac{\delta q + \gamma \varepsilon^2}{q_o}\right)$$

on a $\gamma = 0.2$ et $\gamma = 0.4$ respectivement [16]. Avec des conditions de bords

horizontaux rigides rigides, le départ est moins vertical, et [67][68]

$$D_\perp \simeq \frac{\xi_o^2}{\tau_o} \quad \frac{\delta q + \gamma(P)\varepsilon^1}{q_o} \quad .$$

ii) Dans certains cas il peut y avoir une anisotropie qui, en privilégiant une direction, empêche des déformations ou rotations de façon à maintenir une valeur de $D_\perp > 0$ [61]. Ceci peut être assimilé à l'existence d'un champ extérieur E qui tend à orienter les rouleaux perpendiculairement à l'axe x et le coefficient de diffusion $D_\perp$ va donc être $D_\perp = D_\perp^o + E$ [69] .

9.4. *Amplitude et phase* :

Dans la publication VI on rapporte des mesures sur la dynamique de la phase. Ces mesures sont faites dans une région éloignée de la fente où agit l'élément perturbateur qui induit la modification de phase. Plus précisément la zône de mesure est à une distance plus grande que $\xi = \frac{\xi_o}{\sqrt{2}} \varepsilon^{-0.5}$ (voir p.80) dans le but de découpler la perturbation plus localisée sur l'amplitude, de portée ξ, et le phénomène de diffusion de la phase. Pour cela on a imposé des périodes d'oscillations très longues pour avoir une grande distance d'amortissement de la perturbation de phase ($m_2^{-1} \sim \omega^{-1}$ et $m_2^{-1} > \xi$).

Le problème du couplage de deux perturbations est important, si on veut comprendre l'origine de nos variations périodiques de la phase. Un essai d'interprétation peut être fait à l'aide de l'équation de Landau dans une forme plus générale, qui considère les variations de phase et d'amplitude. Pour cela on utilise l'équation de Landau pour le paramètre d'ordre : $\bar{\bar{V}} = \tilde{V}\, e^{i(\delta q x + \varphi)}$ dans laquelle on a permis une variation explicite du nombre d'onde $q = q_c + \delta q$ des rouleaux, ajouté à la phase de l'enveloppe. Pour des rouleaux dans la direction x, mais autorisant de faibles perturbations dans la direction transversale on a l'équation d'amplitude générale :

$$\tau_o \frac{\partial \bar{\bar{V}}}{\partial t} = \varepsilon \bar{\bar{V}} - \frac{|\bar{\bar{V}}|^2 \bar{\bar{V}}}{V_o^2} + \xi_o^2 \left(\partial_x - \frac{i}{2q_i} \partial_y^2\right)^2 \bar{\bar{V}} \qquad (6)$$

où la dérivée d'ordre supérieur en y exprime le fait de maintenir l'axe x comme direction privilégiée de façon que pour le vecteur d'onde de la structure $\vec{q}$: $q_x \hat{x} + q_y \hat{y}$, on a $q_y << q_x \sim q$.

Une solution stationnaire, sans restriction aux bords, est

$$\bar{\bar{V}} = V_o(\varepsilon - \xi_o^2\, \delta q^2)^{1/2}\, e^{i\delta q x} \quad \text{ou} \quad \bar{\bar{V}} = V_o\, \tilde{\varepsilon}^{1/2}\, e^{i\delta q x} \qquad (7)$$

où $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \xi_o^2 \delta_q^2$. Celui-ci exprime la variation de l'amplitude maximum de vitesse au voisinage du seuil, pour des nombres d'onde différents de q_c.

(Des analyses plus détaillées doivent tenir compte de la différence entre le q critique et le q optimum qui provient de la sélection du nombre d'onde).

Si on se borne aux variations slon x, et pour $q = q_c$, une décomposition élémentaire donne :

$$\tau_o \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} = \varepsilon \tilde{V} - \frac{\tilde{V}^3}{V^2} + \xi_o^2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2} - \tilde{V} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2$$

$$\tau_o \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \xi_o^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{2\xi_o^2}{\tilde{V}} \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$$

Dans la deuxième équation on reconnait l'équation de phase, où $D_{//} = \xi_o^2/\tau_o, (q=q_c)$ avec un terme non linéaire de couplage entre les gradients d'amplitude et phase, qui sont-grosso modo- à l'origine de l'effet inducteur de la fente (modulation d'amplitude périodique) qui entraine les variations de phase.

Une façon plus précise de décrire la situation est d'ajouter une perturbation faible d'amplitude v réelle, à la solution générale $\bar{\bar{V}}$ (7), avec une perturbation de phase : $\bar{\bar{V}}_o e^{i\varphi}$:

$$\bar{\bar{V}} = \bar{\bar{V}}_o \; e^{i\varphi} \; (1 + v)$$

La perturbation v est celle faite par l'écoulement dans la fente et est du type $v = v_o(x) \cos \omega t$, s'amortissant selon x.

L'équation devient donc :

$$\tau_o \left(\frac{\partial v}{\partial t} + i(1+v) \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = \varepsilon(1 + v) - \tilde{\varepsilon}(1 + 3v + \ldots) +$$

$$+ \xi_o^2 \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (1 + v)\left(\delta q + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + i\left\{ (1 + v) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2\left(\delta q + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \frac{\partial v}{\partial x} \right\} \right]$$

qui reflète le couplage de perturbation de phase et d'amplitude.

En négligeant les termes non-linéaires d'ordre supérieur, on a :

$$\tau_o \left(\frac{\partial v}{\partial t} + i \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = -2\tilde{\varepsilon} v - 2\xi_o^2 \delta q \frac{\partial v}{\partial x} + i\xi_o^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2\delta q \frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad (8)$$

Remarques : *i)* Cette façon d'écrire l'équation de Landau permet de la relier au coefficient $D_{//}$. En effet, si on prend la solution stationnaire $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, on obtient

$$v_o \simeq - \frac{\xi_o^2 \delta q}{\tilde{\varepsilon}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial v_o}{\partial x} \simeq - \frac{\xi_o^2 \delta q}{\tilde{\varepsilon}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

qui en remplaçant dans (8) ($v \simeq v_o$ - approximation adiabatique) :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\xi_o^2}{\tau_o} \left(1 - \frac{2\xi_o^2 \delta q^2}{\tilde{\varepsilon}} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \underbrace{\frac{\xi_o^2}{\tau_o} \frac{(\varepsilon - 3\xi_o^2 \delta q^2)}{(\varepsilon - \xi_o^2 \delta q^2)}}_{D_{//}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

ii) Si on considère des variations $\varphi = \varphi(y)$, dans l'équation (6), on trouve à l'ordre plus bas $D_\perp = \xi_o^2/\tau_o \cdot \delta q/q_o$, et le coefficient d'ordre supérieur D_{yy} -terme NL dans le potentiel- pour le terme $\partial^4\varphi/\partial y^4$ dans l'équation de la phase est [65]

$$D_{yy} = - \frac{\xi_o^2}{4q_o^2 \tau_o} \simeq - \frac{D_{//}}{4q_o^2} \quad .$$

L'expérience décrite dans la publication VI vérifie ce caractère diffusif de la phase, et le modèle proposé [38]. La valeur mesurée de $D_{//} = \xi_o^2/\tau_o$ correspond bien à des mesures indépendantes de ξ_o (publication I,II) et τ_o (publication I). Ce fait, en plus de la détermination de l'origine de la modulation de phase (modulation d'un gradient d'amplitude) montre que cette expérience constitué aussi un test précis de plusieurs conséquences du modèle de Landau ou équation d'amplitude. En effet, l'expérience a été faite au voisinage du seuil ($\varepsilon = 0.16$), le fluide utilisé à haut nombre de Prandtl ($P \sim 500$) où des modèles diffusifs sont valables et les perturbations v d'amplitude et gradients de la phase sont faibles.

VOLUME 45, NUMBER 8 PHYSICAL REVIEW LETTERS 25 AUGUST 1980

PUBLICATION VI

Forced Phase Diffusion in Rayleigh-Bénard Convection

J. E. Wesfreid[a] and V. Croquette

Service de Physique du Solide et de Résonance Magnétique, Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, F-91190 Gif-sur-Yvette, France

(Received 21 March 1980)

The first experimental evidence of the diffusive character of the phase variable which describes the position of the convective rolls is presented. To produce a phase modulation a small alternating flow in a slightly supercritical fluid layer is injected. With use of this method, the diffusion coefficient $D_\parallel$ concerning the propagation of phase disturbances parallel to the roll axis is measured.

PACS numbers: 47.25.Jn, 47.20.+m

During the last years there has been a growing interest in Rayleigh-Bénard (RB) convection.[1] The vicinity of the convection threshold R_c has been compared with a second-order phase transition and found to be well described by the Landau model.[2] Concerning the transition to turbulence, in RB convection, two cases can be distinguished depending on the aspect ratio A (A = horizontal dimension/vertical dimension). In the case of small A, turbulence occurs after several bifurcations far from the instability threshold.[3] The behavior of this transition to turbulence is consistent with modern works on dynamical systems with few degrees of freedom and with the concept of strange attractors.[4] In the case of large A, experimental evidence shows that chaos may oc-

© 1980 The American Physical Society

VOLUME 45, NUMBER 8 PHYSICAL REVIEW LETTERS 25 AUGUST 1980

cur very soon after the onset of convection, R_c.[5] No complete explanation has been given yet for this behavior. However, it has been suggested that this kind of turbulence resulted from slow erratic motions of large parts of the roll system, i.e., from a spontaneous instability of the phase of the roll pattern.[6] To get a better understanding of the transition to turbulence in containers with large A, a problem to tackle seems to be that of phase dynamics.

In this paper we describe an experimental study of a forced phase modulation in RB convection. For this purpose we have generated a localized phase disturbance in a RB convection experiment and measured, using laser Doppler anemometry (LDA), the propagation of this disturbance. Its diffusive behavior confirms recent theoretical results.[6]

The convective motions were confined in a rectangular Plexiglass frame sandwiched between two massive horizontal copper plates, the upper one being uniformly cooled and the lower one uniformly heated. The physical dimensions of the apparatus are $L_x = 30d$, $L_y = 5d$, with $L_z = d = 0.6$ cm, as described previously.[7] We have performed our experiments on a layer of oil with a Prandtl number ($P = \nu/\kappa$) equal to 492 (ν being the kinematic viscosity and κ the thermal diffusivity). The vertical thermal diffusion time of this layer d^2/κ was 320 sec.

A slot, 0.03 cm wide, parallel to L_y and situated at $L_x/2$ was cut in each of the copper plates. An imposed vertical stream flowed through the slots (see Fig. 1). The flow was varied periodically and followed the relation $q(t) = q_0 + q_1 \cos\omega t$ ($\omega = 2\pi/T$, $q_1 < q_0$, $q_0 \simeq 2\times10^{-3}$ cm^3/sec).

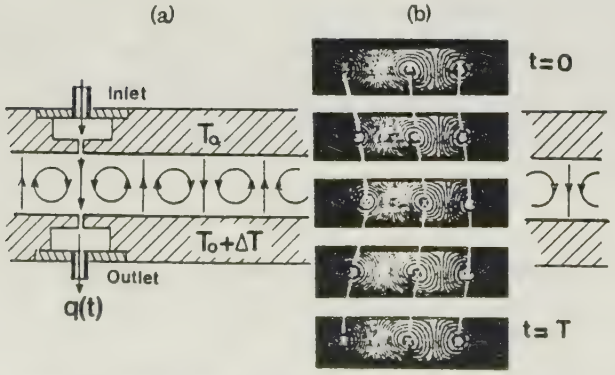


FIG. 1. (a) Experimental apparatus with a sketch of the generator of the disturbance. (b) Interferometric pictures visualizing the shifting of the roll structure during one period of perturbation. The position of the centers of the rolls vs time is marked by white lines. (For the purpose of visualization the disturbance has been increased considerably.)

The vertical velocity component v_z of the convective motion was measured by LDA in the middle plane of the container, and continuously recorded.

A visualization of the temperature gradients in the x-z plane was also accomplished by a differential interferometry technique[8] (see Fig. 1). In these pictures the fringes represent the lines of temperature horizontal isogradient.

The vertical velocity component $v_z(x,t)$ of the convective field in the middle plane of the container may be described by

$$v_z(x,t) = \bar{V}(x,t)\cos[k_c x + \varphi(x,t)], \tag{1}$$

with k_c, the critical wave number of the spatial pattern without disturbance; $\bar{V}(x,t)$, the amplitude of the convective pattern; $\varphi(x,t)$, the phase contribution to the convective pattern.

The oscillating flow, imposed through the slots, induces time-dependent variations of the convective structure. The first feature that we observe is that the velocity variations are periodic in time and have the same frequency as that of the imposed flow; no noticeable harmonics were generated. Moreover, the magnitude of the velocity variations is spatially modulated. Two regions may be distinguished in the container. The first one, which we label the "amplitude modulation region," is located in the vicinity of the slots. In this region, velocity variations are mainly proportional to the mean velocity of the convective structure, that is to say the *amplitude* of the velocity field is time modulated:

$$\bar{V} = \bar{V}_0 + \bar{V}_1(x)\cos(\omega t + \alpha_0). \tag{2}$$

The second region, which we label the "phase modulation region," extends to the rolls further away from the slots. In this second region, velocity variations are maximum where the mean velocity vanishes and vanish where the mean velocity is maximum. These features suggest a periodic shifting accompanied by a deformation of the rolls structure. Since the roll position may be defined by the phase factor $\varphi(x,t)$ in Eq. (1), periodic shifting of the rolls is equivalent to a phase modulation

$$\varphi(x,t) = \varphi_0(x)\cos[\omega t + \theta(x)]. \tag{3}$$

The second feature that we observe is that the phase modulation experiences a spatial damping and this damping increases with frequency; that is, $\varphi_0(x)$ is a decreasing function with the dis-

VOLUME 45, NUMBER 8 PHYSICAL REVIEW LETTERS 25 AUGUST 1980

tance from the slots and with the frequency ω.

The third feature observed is that, in the phase modulation region, a time phase shift occurs between the velocity variations and the imposed flow. This phase shift $\theta(x)$ increases with the distance from the slots and with the perturbation frequency.

In our experiment, where the periodic perturbation extends across the entire y dimension of the container and where the rolls have a two-dimensional structure parallel to this flow, no phase perturbations are expected to propagate along the y axis (so that $\partial^n \varphi/\partial y^n = 0, \forall n$). So we study the propagation of phase perturbations in x direction. The phase dynamics has been predicted[6] to be governed by a diffusive process:

$$\partial\varphi/\partial t = D_{\parallel}\partial^2\varphi/\partial x^2. \tag{4}$$

The diffusion coefficient may be written $D_{\parallel} = f(\epsilon, k_c)\xi_0^2/\tau_0$, where $\xi_0 = 0.385d$ is the characteristic length scale for amplitude perturbations, $\tau_0 = (d^2/\kappa)(1.95P + 1)/38.44P$ is the characteristic time scale for amplitude perturbations, and $\epsilon = (R - R_c)/R_c$ is the relative distance to the onset of convection,[7] and

$$f(\epsilon, k_c) = \frac{\epsilon - 4.31\delta^2/k_c^2}{\epsilon - 1.44\delta^2/k_c^2}, \quad \delta = k - k_c.$$

The factor $f(\epsilon, k_c)$ is very close to 1 when $k \sim k_c$. For the rigid-rigid horizontal boundaries in our apparatus and with the physical properties of our silicone oil,[7] we get $D_{\parallel} \simeq \xi_0^2/\tau_0 = 3.3 \times 10^{-3}$ cm^2/sec. The solution of Eq. (4) with the initial condition $\varphi(x = 0, t) = \varphi_0 \cos\omega t$ is

$$\varphi(x, t) = \varphi_0 \exp(-m_1|x|)\cos(m_2|x| - \omega t), \tag{5}$$

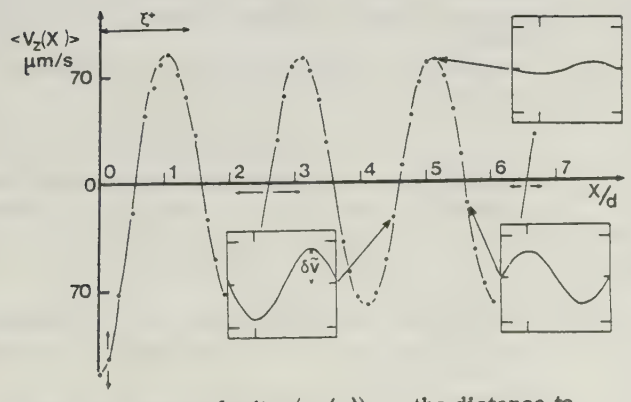


FIG. 2. Mean velocity $\langle v_z(x)\rangle$ vs the distance to the slots and detailed view of the velocity fluctuations $\delta\vec{v}$ during one complete period of perturbation (an expanded scale has been used for $\delta\vec{v}$: 1 div = 3.5 μm/sec).

with $m_1 = m_2 = (\omega/2D_{\parallel})^{1/2} \simeq (\pi\tau_0/T)^{1/2}/\xi_0$.

All our experiments were performed at $\epsilon = 0.16$. We have scanned the velocity field step by step along the x axis at $L_y/2$. At each step, spaced 0.07 cm from the previous one, the time dependence of the velocity was recorded during two periods of the perturbation. Six different periods were investigated: $T/\tau_0 = 18.75$, 37.5, 75, 187.5, 375, and 817.5 ($\tau_0 = 16$ sec).

As it has been pointed out previously, significant velocity variations exist at a distance up to $6d$ from the slots. This cannot be explained by an amplitude modulation whose characteristic penetration length is expected to be smaller or equal to the correlation length ξ^+. ($\xi^+ = \sqrt{2}\xi_0\epsilon^{-0.5} = 1.35d$ when $\epsilon = 0.16$.)[7] This demonstrates that we deal with another phenomenon of a different scale length. This phenomenon may be understood by considering the interferometric pictures, where a periodic shifting of the rolls structure clearly appears, demonstrating the phase modulation.

Our recordings of the velocity give (i = step number)

$$v_x(x_i, t) = \langle v_x(x_i)\rangle + \delta\bar{v}_x(x_i)\cos[\omega t + \theta(x_i)]. \tag{6}$$

The velocity variations may be related to the phase modulation given in Eq. (1) so that the phase

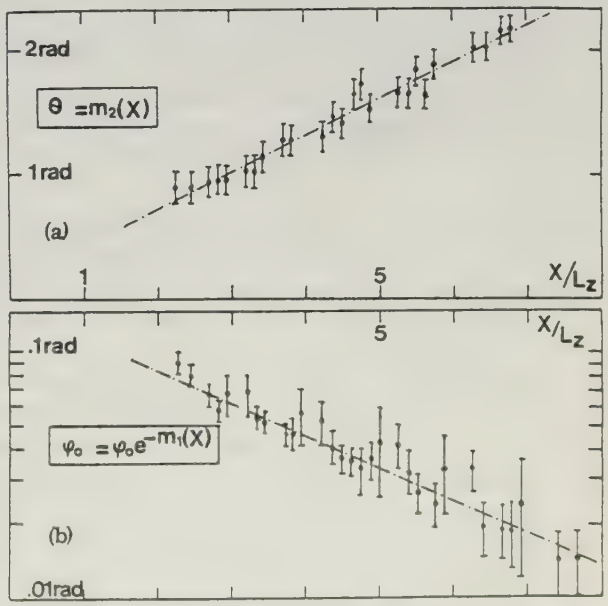


FIG. 3. (a) and (b), respectively, phase shift θ and phase modulation amplitude φ_0 vs the distance to the slots for $T = 187.5\tau_0$.

VOLUME 45, NUMBER 8 PHYSICAL REVIEW LETTERS 25 AUGUST 1980

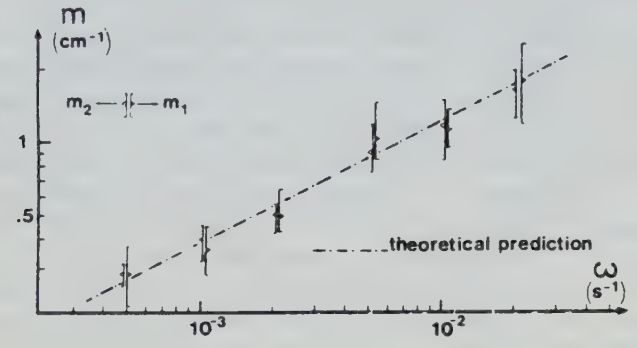


FIG. 4. Experimental value of m_1 and m_2 vs the frequency of the perturbation ($\omega = 2\pi/T$).

modulation may be worked out with use of a first-order expansion in terms of φ (since φ was < 0.1 rad); thus we may express the term φ_0 in Eq. (3) as

$$\varphi_0(x_i) = \delta\tilde{v}_z(x_i)/[\tilde{V}^2 - \langle v_z(x_i)\rangle^2]^{1/2}.$$

At each step we have measured $\langle v_z(x_i)\rangle$, $\delta\tilde{v}_z(x_i)$, and $\theta(x_i)$ (Fig. 2). From $\delta\tilde{v}_z(x_i)$ we deduced $\varphi_0(x_i)$. The plot of $\varphi_0(x_i)$ vs x_i [Fig. 3(b)] is well fitted by an exponential decrease $\varphi_0 \exp(-m_1 x)$, far from the slots. Thus we can introduce the characteristic phase penetration length $L_\varphi = (m_1)^{-1}$. The plot of the time phase shift $\theta(x_i)$ vs x_i [Fig. 3(a)] has, far from the slots, a linear asymptotic behavior $\theta(x) = m_2 x$.

We have found that the equality $m_1 = m_2$ holds for the different T measurements within our experimental errors. Notice the independent character of these two measurements. Moreover, the m values obtained are compatible with the relation $m^{-1} \propto \sqrt{T}$, typical of a diffusion process (Fig. 4).

The measured value of the diffusion coefficient $D_{\parallel \text{expt}} = (3.5 \pm 1) \times 10^{-3}$ cm^2/sec is in good agreement with the theoretical prediction[6] and consistent with earlier determinations of ξ_0 and τ_0.[7,9]

For the smallest periods, $37.5\tau_0$ and $18.75\tau_0$, we have used $q(t) = q_1 \cos\omega t$ as the imposed flow. Since this imposed flow reverses periodically, a small roll is alternately created and destroyed at the slots which obviously generates a stronger initial phase modulation φ_0.

The different series of measurements demonstrate the diffusive behavior of the phase contribution to the velocity field.[10] The diffusion coefficient $D_\parallel$ agreed with the predicted value[6] within our experimental errors. This quantitative agreement is valid since we have performed our experiments with a high-Prandtl-number oil at a slightly supercritical Rayleigh number and with slow variation of phase and amplitude.[11] Actually a pure phase disturbance is rather difficult to generate and in our experiment the amplitude of the rolls structure was also perturbed. However, we found that the phase contribution can dominate the amplitude contribution. This happens when the amplitude modulation is damped faster than the phase modulation, that is when $L_\varphi > \xi^+$ which leads to $T > 2\pi\tau$ (where $\tau = \tau_0\epsilon^{-1}$ is the characteristic time of the slowing down[7]). We suggest that this kind of analysis may be applied to the similar interesting experiments of Berkovsky *et al.*[12] concerning thermoconvective waves.

We wish to thank Dr. E. Koschmieder, Dr. Y. Pomeau, Dr. P. Manneville, Dr. P. Bergé, and Dr. M. Dubois for interesting discussions and M. Labouise and B. Ozenda for their technical assistance.

---

[a]Present address: Ecole Supérieure de Physique et Chimie, 10 rue Vauquelin, F-75231 Paris 05, France.

[1]E. J. Hopfinger, P. Atten, and F. H. Busse, J. Fluid. Mech. 92, 217 (1979).

[2]R. Graham, Proceedings of the Seventeenth Solvay Conference, Brussels, 1978 (to be published).

[3]J. Maurer and A. Libchaber, J. Phys. (Paris), Lett. 40, L419 (1979); M. Dubois and P. Bergé, Phys. Lett. 76A, 53 (1980); J. P. Gollub and S. V. Benson, to be published.

[4]D. Ruelle and F. Takens, Commun. Math. Phys. 20, 167 (1971).

[5]G. Ahlers and R. W. Walden, Phys. Rev. Lett. 44, 445 (1980); P. Bergé, in *Experiments on Hydrodynamic Instabilities and Transitions to Turbulence*, edited by J. Ehlers, K. Hepp, R. Kippenhehn, H. A. Weidemuller, and J. Vittartz, Lecture Notes in Physics Vol. 104 (Springer-Verlag, Germany, 1979), p. 288; A. Libchaber and J. Maurer, J. Phys. (Paris), Lett. 39, L369 (1978).

[6]Y. Pomeau and P. Manneville, J. Phys. (Paris), Lett. 40, L609 (1979).

[7]J. E. Wesfreid, Y. Pomeau, M. Dubois, C. Normand, and P. Bergé, J. Phys. (Paris) 39, 725 (1978).

[8]H. Oertel, Jr., and K. Bühler, Int. J. Heat Mass Transfer 21, 1111 (1978); P. Bergé and M. Dubois, J. Phys. (Paris), Lett. 40, L505 (1979).

[9]J. E. Wesfreid, P. Bergé, and M. Dubois, Phys. Rev. A 19, 1231 (1979).

[10]For general diffusive behavior in RB convection, see A. C. Newell and J. A. Whitehead, J. Fluid Mech. 38, 279 (1969).

[11]Numerical resolution of Eq. (2) in Ref. 6 gives similar velocity fields as in our experiments; P. Manneville, private communication.

[12]B. M. Berkovsky, V. E. Fertman, A. K. Sinitsyn, and Yu. I. Barkov, J. Fluid Mech. 89, 173 (1978).

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Bénard, Rev. Gen. Sci. 11, 1261 (1900) ;
Rayleigh (Lord), Philos. Mag. 32, 529 (1916).

[2] E.R. Lapwood, Proc. Comb. Phil. Soc. 44, 508 (1948).

[3] G.I. Taylor, Phil. Trans. Roy. Soc. (London) A223, 289 (1923).

[4] F.H. Busse, Rep. Prog. Phys. 41, 1929 (1978).

[5] voir par exemple : H. Haken, Rev. Mod. Phys. 47, 67 (1975).

[6] voir par exemple : S.H. Stanley, "Introduction to phase transitions and critical phenomena" , Clarendon Press-Oxford (1971).

[7] P. Glansdorff, I. Prigogine, "Structure, stability et fluctuations" ed. Masson-Paris (1971).

[8] L.D. Landau et E.M. Lifshiftz "Physique Statistique" Ed. Mir-Moscou (1967).

[9] P. Bergé, M. Dubois, Phys. Rev. Lett. 32, 1041 (1974).

[10] L.D. Landau, "Collected papers of L.D. Landau" Ed. by D. Ter Haar. Gordon and Breach. New York (1965).

[11] L.A. Segel. J. Fluid Mech. 38. 203 (1969);
A. Newell and J. Whitehead. J. Fluid Mech. 38. 279 (1969).

[12] S. Chandrasekhar, "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability" (Clarendon, Oxford 1961)
G.Z. Gershuni, E.M. Zhukhovitskii, "Convective Stability of Incompressible Fluids" Keterpress Entr., Jerusalem 1976.
C. Normand, Y. Pomeau, M.G. Velarde, Rev. of Mod. Phys. 49, 581 (1977).

[13] L.M. Hocking, K. Stewartson and J.T. Stuart, J. Fluid Mech. 51, 705 (1972).
P.H. Roberts, Adv. Chem. Phys. 32, 17 (1975).

[14] E. Palm , NATO ASI Proc. (Geilo) 1981.

[15] L.D. Landau et, E.M. Lifshiftz, "Mécanique des Fluides" Ed. Mir. Moscou (1971).
J.T. Stuart, J. Fluid Mech. 4, 1 (1958).

[16] D.D. Joseph :"Stability of Fluid Motions",Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1976).

[17] M. Dubois, P. Bergé ; J. Fluid Mech. 85, 641 (1978).
C. Normand, Thèse d'Etat,Paris 1981.
J.P. Gollub, M.H. Freilich, Phys. Fluids 19, 618 (1976).

[18] Y. Pomeau, P. Manneville, J. de Physique 42, 1067 (1981).
Y. Pomeau, S. Zalesky, J. de Physique 42, 515 (1981).

[19] J. Swift, P.C. Hohenberg, Phys. Rev. A15, 319 (1977).

[20] E. Guyon : Tendances nouvelles en mécanique, IHES-Bures-sur-Yvette, IHES/P/79/310 (1979).

[21] S.N. Brown, K. Stewartson, Stud. Appl. Math. 57, 187 (1977).

[22] R.J. Schmidt, S.W. Milverton, Proc. Soc. London A152, 586 (1935).
E.L. Koschmieder, S.G. Pallas ; Int. J. Heat Mass Transfer 17, 991 (1974).
J. Moreno, J. Jimenez, A. Cordoba, E. Rojas, M. Zamora, Rev. Sci. Instrum. 51, 82 (1980).

[23] G. Ahlers, Phys. Rev. Lett. 33, 1185 (1974).
A. Libchaber, J. Maurer, J. Physique Lett. 39, L-369 (1978).

[24] J. Pantaloni, Communication privée.
M. Zamora, Communication privée.

[25] P. Bergé, M. Dubois, "Scattering Techniques Applied to supramolecular and non equilibrium systems", ed. by S.H. Chen, B. Chu, Plenum Press (1981).

[26] H. Oertel, Physics-Chemical Hydrodynamics P CH 80, Madrid (1980).

[27] R. Farhadieh, R.S. Tankin, J. Fluid Mech. 66, 739 (1974).

[28] J.N. Koster, Dissertation Universität (T.H.) Karlsruhe (1980).

[29] P.L. Silveston, Forsch. Ing. Wes. 24, 59 (1958).

[30] H.C. Nataf, Thèse 3ème cycle, Paris (1980).
M. Giglio, A. Vendramini, Phys. Rev. Lett. 39,1014 (1977).

[31] G. Mordchelles-Régnier, C. Kaplan "Les instabilités en hydraulique et en mécanique des Fluides", ed. La Houille Blanche - Grenoble (1964).

[32] H. Oertel ji, K. Bühler, Inst. J. Mass Heat Transfer 21, 1111 (1978).

[33] P. Bergé, M. Dubois, J. de Physique Lett. 40,L505 (1979).

[34] R. Krishnamurti, J. Fluid Mech. 42, p. 205-309 (1970).
E.L. Koschmieder, Adv. Chem. Phys. 26, p. 177 (1974).

[35] par exemple : F. Durst, A. Melling, J.H. Whitelaw, "Principles and Practice of Laser - Döppler Anemometry. Academic Press (London) 1976.

[36] M. Dubois, Thèse d'Etat, Paris (1976).

[37] R. Graham, Phys. Rev. A10, 1762 (1974).

[38] Y. Pomeau, P. Manneville, J. Physique Lett. 40, L609 (1979).

[39] M. Tournarie, J. de Physique 30, 47 (1969).

[40] P. Byrd, Friedman : Handbook of elliptical integrals.

[41] E. Siggia, A. Zippelius, preprint.

[42] K. Stork, U. Müller, J. Fluid Mech. 54, 599 (1972).

[43] Huiles Rhodorsil ; Notice technique, n° X-03-02 (Mars 1976).

[44] P.G. Daniels, Proc. R. Soc. Lond. A358, 173 (1978).
P. Hall and I.C. Walton, Proc. R. Soc. Lond. A358, 199 (1978).

[45] W.A. Smith, Phys. Rev. Lett. 32, 1164 (1974).

[46] P. Lallemand, C. Allain, J. de Physique 41, 1 (1980).

[47] J.S. Turner, "Buoyancy Effects in Fluids" Cambridge University Univ. Press. London (1973).

[48] P.G. de Gennes, "Superconductivity of Metals and Alloys", W.A. Benjamin, New York (1966).

[49] H. Tippelskirch, Beitr. Phys. Atmos. Bd. 32, 2 (1959).

[50] E.L. Koschmieder, Adv. Chem. Phys. 26, 177 (1974).

[51] B.M. Berkovsky, V.E. Fertman, 4th Int. Heat. Transfer Conf. Versailles, 4, 12 (197).
J.A. Srulijes, Dissertation, Universität Karlsuhe (TH) (1979).

[52] G. Pfister, I. Rehberg, Phys. Lett. A 83, 19 (1981).

[53] D. Coles, J. Fluid Mech. 21, 385 (1965).

[54] R. Ribotta, Phys. Rev. Lett. 42, 1212 (1979).

[55] R.E. Kelly, D. Pal, J. Fluid Mech. 86, 433 (1978).

[56] J.A. Whithehead Jr., Am. Scientist. 59, 444 (1971).

[57] C. Betrencourt, E. Guyon, G. Giraud, Eur. J. Phys. 1, 206 (1981).

[58] G. Ahlers, J. Fluid Mech. 98, 137 (1980).

[59] V. Croquette, J.E. Wesfreid, "Symmetries and broken symmetries in condensed condensed matter physics" ed. N. Boccara (IDSET, Paris) (1981).

[60] V. Croquette, F. Schosseler, à paraitre.

[61] E. Guazzelli, Thèse 3ème cycle, Paris (1981).

[62] E. Guazzelli, E. Guyon, J.E. Wesfreid, "Symmetries and broken symmetries in condensed matter physics" Ed. N. Boccara (IDSET, Paris) (1981).

[63] J.A. Whitehead, J. Fluid Mech. 75, 715 (1976).

[64] E. Siggia, A. Zippelius, Phys. Rev. A 24, 1036 (1981).

[65] J. Toner, D.R. Nelson, Phys. Rev. B 23, 316 (1981).

[66] M.M. Chen, J.A. Whitehead, J. Fluid Mech. 31, 15 (1968).

[67] R.H. Rogers, Rep. Prog. Phys. 39, 1 (1976).

[68] J.M. Piquemal, P. Manneville, communication privée.

[69] G. Dewel, D. Walgraef, P. Borckmans, J. de Physique Lett. 42, L-361 (1981).

[70] R. Krishnamurti, J. Fluid. Mech. 33, 445 (1968).

[71] J.T. Stuart, J. Fluid. Mech. 18, 481 (1964).